

関数の等高線図¹

等高線の描き方

等高線は、次のような方法⁽¹⁾で描かれている。

まず、関数値は、立体図の描画の場合と同じように、変数の変域を格子で区切って格子点における値を計算しておく。その後の計算においては、この格子点での値を使って計算を行う。格子点での値を使うことにより、複雑な関数であっても、その関数値の計算は最初の格子点での値を求めるときだけで済む。

次に、等高線の高さを決める。その値を c とすると、変数 x と y の変域から $c = f(x, y)$ となる点 (x, y) を探す。その点から関数値が c である点を順番になぞっていくが、それを次のように格子点での関数値を使って行う。

いま、 x の変域が $[a, b]$ 、 y の変域が $[c, d]$ であるとする。ここで、 $[a, b]$ および $[c, d]$ は領域 $a \leq x \leq b$ および $c \leq y \leq d$ を表わす。集合で表わすと $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ および $[c, d] = \{y \mid c \leq y \leq d\}$ となります。これらの変域を、 $a = x_0, \dots, x_n = b$ 、および $c = y_0, \dots, y_n = d$ と、それぞれ点 x_i および点 y_j によって等分割して、矩形 $[a, b] \times [c, d]$ が格子状に分割されているものとする。格子状に分割された小矩形の辺の上で関数値が c になっているかどうかを調べる。

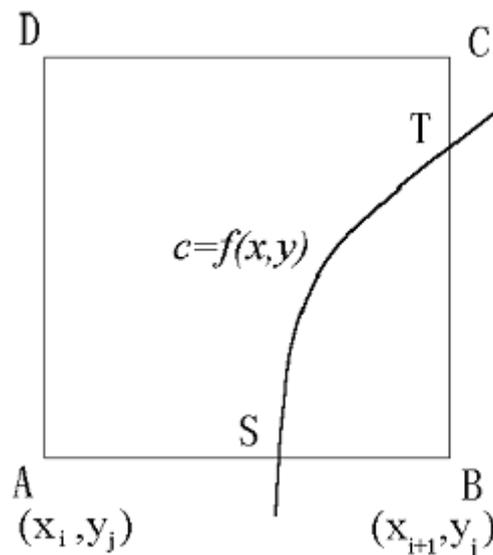


図2 矩形 ABCD 内の等高線 $c = f(x, y)$

¹ 本解説は、TRY! PC、2000年4月号「Delphiによる数値計算プログラミングのすすめ：第2回 等高線図を描く」の原稿をもとにしたものである。

いま、隣接する格子点 (x_i, y_j) と (x_{i+1}, y_j) を A と B で表わし (図 2)、点 A と点 B の間で関数値が c であるとする。このとき、格子点の間隔が十分に小さく取られているならば、

$$f(x_i, y_j) < c < f(x_{i+1}, y_j) \quad \text{あるいは} \quad f(x_i, y_j) > c > f(x_{i+1}, y_j)$$

が成り立っていると考えられる。

すなわち、

$$(f(x_i, y_j) - c)(f(x_{i+1}, y_j) - c) < 0 \quad (1)$$

が成り立つとき、等高線 $c = f(x, y)$ は点 (x_i, y_j) と (x_i, y_{j+1}) の間を通過していると考えられる。

辺 AB を通って矩形 $ABCD$ の内部に入った等高線がどの辺を通過して出て行くのか、その出て行く辺も各辺の端点での関数値と等高線上での関数値 c との差の積 (式 (1)) を調べることによって求めることができる。図 2 の場合は、辺 BC を通過しているので、点 B と C での関数値 $f(B)$ と $f(C)$ の間に

$$(f(B) - c)(f(C) - c) < 0$$

が成り立っている。

辺上の等高線の通過点は、辺上における関数値の変化を 1 次式で近似して求める。すなわち、辺 AB 上の等高線の通過点 S 、および BC 上の通過点 T は、辺の端点での関数値と等高線上での関数値 c との差で次のように内分して求める。

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{|f(A) - c|}{|c - f(B)|}, \quad \frac{\overline{BT}}{\overline{TC}} = \frac{|f(B) - c|}{|c - f(C)|}$$

すなわち、点 S を辺 AB 上に $\overline{AS} : \overline{SB} = |f(A) - c| : |c - f(B)|$ となるようにとる。点 T についても同様に、

辺 BC 上に $\overline{BT} : \overline{TC} = |f(B) - c| : |c - f(C)|$ となるようにとる。

点 S と点 T を直線で結んで矩形 $ABCD$ での等高線とする。直線で結んでも、格子点の間隔を十分に小さくとっておけば、見かけ上滑らかな等高線を得ることができる。

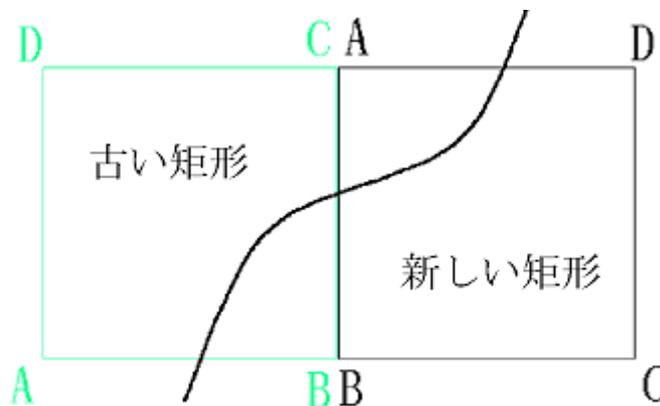


図 3 新しい矩形で次の等高線を求める

次の通過点は、新しく求めた通過点 T を含む辺を改めて辺 AB として上の手続きを繰り返す。上の場合では、点 C と B を改めて点 A と B とおいて矩形 ABCD を考える (図 3)

このように矩形 ABCD を曲線 $f(x, y) = c$ 上に沿って動かしながら等高線を描いていくと、変数の変域の端に突き当たるか、あるいは既に等高線を引いた矩形に戻るなので、そこでその等高線の描画を終了する。

参 考 文 献

- (1) 森 正武 「曲線と曲面」, Pp.150、教育出版株式会社、1974.