

# 順序カテゴリ尺度の非単調数量化について

## サー斯顿モデルと共通数量化の比較

岡本安晴

日本女子大学人間社会学部

### 1 はじめに

2段数量化分析法（岡本、2013；Okamoto, 2015）では、カテゴリ変量の数量化（数量化の結果を複数の分析において共通に用いることができるので共通数量化と呼ばれている）を変量ごとに行い、分散最大化の基準でデータの情報を取り出している。このとき、カテゴリ変量は名義尺度として扱われるので、順序カテゴリ変量に適用されたときはカテゴリの順序は無視される。順序カテゴリ尺度の単調変換による数量化は、例えばサー斯顿モデルを設定して行うことができる。サー斯顿モデルによる数量化と共通数量化の比較を報告する。

### 2 サー斯顿モデルによる数量化

順序カテゴリ変量 $Y$ の確率が次のサー斯顿モデルで与えられるとする。

$$P(Y = k|X) = P(C_{k-1} < X \leq C_k), \quad X \sim N(0, 1)$$

ここで、カテゴリ数を $K$ とすると、

$$-\infty = C_0, \quad C_K = +\infty$$

である。

選択カテゴリ $Y = k$ のデータ数が $F_k$ であるとき、カテゴリ境界 $C_k$ の推定値を

$$P(X < \hat{C}_k) = \frac{\sum_{j=1}^k F_j}{\sum_{j=1}^K F_j}$$

を満たす値 $\hat{C}_k$ として求める。このとき、カテゴリ $Y = k$ の数量化の値 $T_k$ を、 $N(0, 1)$ の区間 $(C_{k-1}, C_k)$ における確率分布

$$P_k(u) = \phi(u) / \int_{C_{k-1}}^{C_k} \phi(v) dv$$

の代表値で与える。ここで、 $\phi(u)$ は、 $N(0, 1)$ の確率密度関数である。代表値としては平均値、中央値などがある。平均値を代表値（sigma value; cf. 椎名、2016）とすると、

$$T_k = E_{P_k(u)}[u] = \int_{C_{k-1}}^{C_k} u \phi(u) du / \int_{C_{k-1}}^{C_k} \phi(u) du$$

である。

### 3 共通数量化

カテゴリ変量の indicator 行列を  $G$  とおく。すなわち、

$$G = (g_{ij}), \quad g_{ij} = \begin{cases} 1 & i \text{ 番目のデータのカテゴリが } j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

である。数量化を表すベクトルを

$$\omega = (\omega_j), \quad \omega_j = \text{カテゴリ } j \text{ の数量化の値}$$

とおくとき、カテゴリ変量の数量化されたデータは  $G\omega$  で表される。共通数量化は  $G\omega$  を最大化するものとして求められる。すなわち、

$$\omega \leftarrow \arg \max_{\omega} \text{Var}(G\omega), \quad \omega' \omega = 1$$

である。この共通数量化は、数値計算としては、indicator 行列  $G$  を数値データと見なして非標準化主成分分析を行うことと同じである。

#### 4 比較例

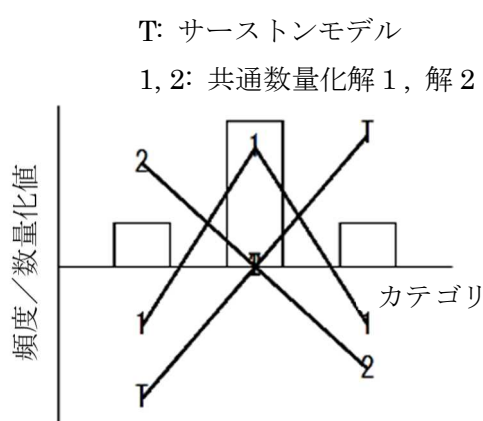


図1 3カテゴリの場合

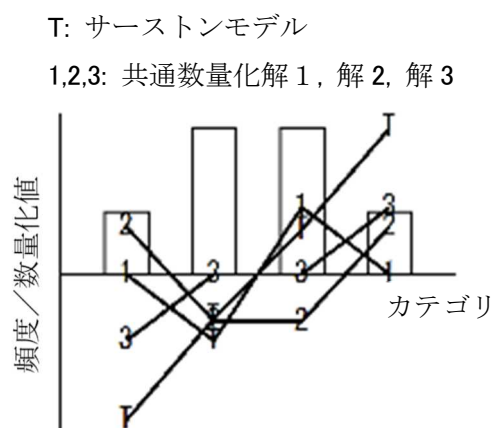


図2 4カテゴリの場合

カテゴリ数が3の場合と4の場合の数量化例を図1と図2に示す。サーストンモデルによる数量化を  $T$  で表し、共通数量化による解を数字 1, 2, 3 で表している。例えば、数字 1 は第 1 解を表している。一般に、カテゴリ数が  $K$  のとき、共通数量化は  $K-1$  個の解をもつ。サーストンモデルによる数量化はカテゴリ変量と単調関係にあるが、共通数量化は、カテゴリ変量と単調関係にあるもの（3カテゴリの解 2、4カテゴリの解 3）、馬蹄形の関係にあるもの（3カテゴリの解 1、4カテゴリの解 2）などが認められる。馬蹄形関係にある解は、カテゴリ変量との関係が（逆）U字型になっている関係（最適/最悪値がカテゴリの中ほどにあるような関係）を表すことが予想される。すなわち、共通数量化における解によって、順序カテゴリ変量の単調関係だけでなく、カテゴリの選択頻度に含まれる多面的情報が表されることが期待される。

#### 引用文献

岡本安晴 (2013). 日本行動計量学会第 41 回大会抄録集、192-195.

Okamoto, Y. (2015). *Japan Women's University Journal*, No. 26, 99-112. (Published in 2016)

椎名乾平 (2016). キックオフシンポジウムペーパー；慶應義塾大学、5月