

フィッシャー情報量の利用における問題点

○岡本安晴

日本女子大学人間社会学部

問 題

フィッシャー情報量は項目反応理論においてテスト情報量と呼ばれ、効率のよいテスト項目の選択を行うために用いられる。しかし、パラメタ推定値の分散の情報関数による推定は、各サンプルが独立に同一の分布に従う (iid) という仮定の下で、サンプル数 N を大きくしたときに成り立つ漸近定理に基づいて行われる。したがって、iidの仮定が成り立たなく、サンプル数 N が十分に大きくないとき (例えば、テスト実施時の開始時あたり) は、情報関数による分散の推定が不適切になる可能性があるが、その1例を報告する。またフィッシャー情報量は、無情報事前分布の1つである Jeffreys 事前分布の構成に用いられる。しかし、テストに対するフィッシャー情報量は項目情報関数によって構成されるので、テスト項目を選択するテスト作成者のもつ事前情報が反映されることになる。まず、分散の推定が不適切になるシミュレーション例を示す。

シミュレーション

項目特性関数を1パラメタ・ロジスティック関数

$$P(\theta, b) = 1/[1 + \exp\{-3.5(\theta - b)\}]$$

で与えて、シミュレーションを行った。ここで、 θ は能力パラメタ、 b は困難度パラメタである。 $b = -1$ である項目を $N_{\text{Items}}N$ 個、 $b = 1$ である項目を $N_{\text{Items}}P$ 個用意した。テスト項目に対する正答確率 $P(\theta, b)$ の値が0より大きく、1より小さいので、全問正答あるいは誤答になる確率は0ではない。全問正答あるいは誤答のときは、 θ の最尤推定値 $\hat{\theta}$ は $+\infty$ あるいは $-\infty$ である。したがって、 $\hat{\theta}$ の期待値 $E(\hat{\theta})$ が定まらず、 $\hat{\theta}$ の分散 $V(\hat{\theta})$ が理論的に与えられない。このことは、フィッシャー情報量によって分散の推定を行うことは理論的には不適切であることを示すものと考えられる。しかし、シミュレーションによる $\hat{\theta}$ の分散の算出を、全問正答あるいは誤答の場合を除いて行った。 $\hat{\theta}$ の分散は理論的には存在しないが、実用上の問題として全問正答あるいは誤答の場合を除いてシミュレーションによる検討を行うことは意味があると考えられる。

フィッシャー情報量 $I(\theta)$ は

$$I(\theta) = \sum P'(\theta, b_i)^2 / \{P(\theta, b_i)Q(\theta, b_i)\}$$

で与えられる。ここで、 $Q(\theta, b_i) = 1 - P(\theta, b_i)$ であり、 $N_{\text{Items}}N$ 個の b_i の値は -1 、 $N_{\text{Items}}P$ 個の b_i の値は 1 である。 $\hat{\theta}$ の分散のフィッシャー情報量による推定値は

$$V(\hat{\theta}) = I(\theta)^{-1}$$

で与えられる。NItemsN = NItemsPの値が、5、10、100 の場合の結果を図 1, 2, 3 に示す。シミ

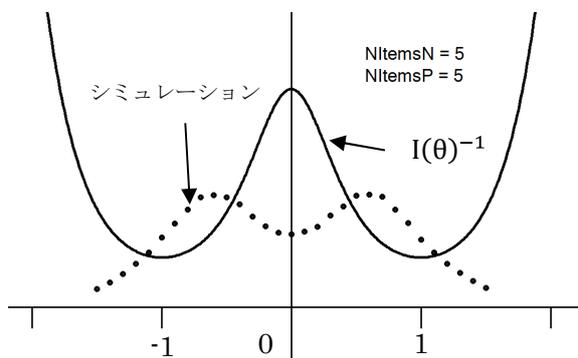


図 1. 情報量による分散の推定とシミュレーション—1.

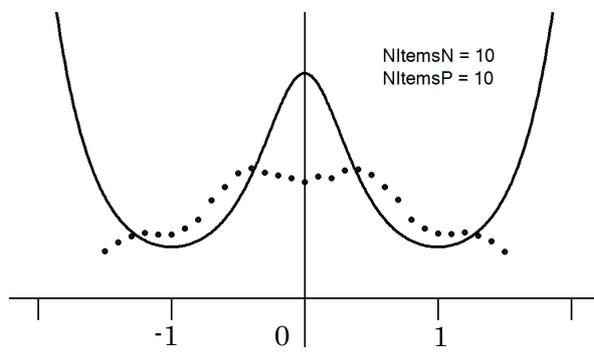


図 2. 情報量による分散の推定とシミュレーション—2.

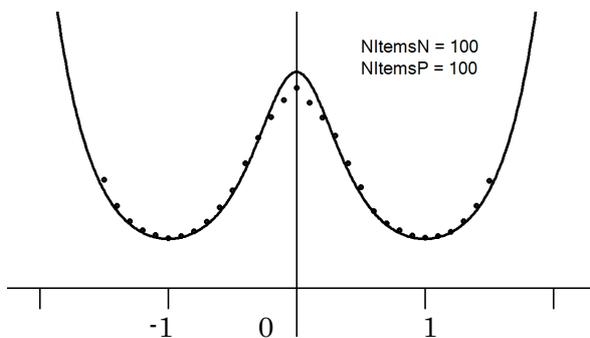


図 3. 情報量による分散の推定とシミュレーション—3.

ュレーションでは、 θ の値を-1.5 から 1.5 までの範囲で 0.1 ステップサイズで変化させ、各 θ 値に対するシミュレーションによる値を黒小円で示した。フィッシャー情報量による分散の推定値 $I(\theta)^{-1}$ は曲線で示した。図から、個数 NItemsN = NItemsP が 5 のときは、シミュレーションによる分散の値の変化は M 型であるが、フィッシャー情報量による推定値の変化は W 型を示し、逆の関係になっている (図 1)。個数 NItemsN = NItemsP が 10 のときもこの M 型と W 型という逆の関係が認められる (図 2)。個数 NItemsN = NItemsP が 100 になると、両者

の関係はかなりよく一致している (図 3)。

Jeffreys 事前分布

Jeffreys 事前分布 $f(\theta)$ は、パラメタの変換に対して確率空間が対応するための条件

$$I(\tau) = I(\theta)|d\theta/d\tau|^2$$

が成り立つように

$$f(\theta) \propto I(\theta)^{1/2}$$

で与えられる。フィッシャー情報量に基づいてテスト項目を選択する場合、 $I(\theta)$ にはテスト実施者が受験者に対してもつ情報が反映される。予想される能力値 θ での $I(\theta)$ が最大になるようにテスト項目が選定されるのに応じて Jeffreys 事前分布 $f(\theta)$ も変化することになる。すなわち、Jeffreys 事前分布には、テスト構成者の受験者に対する事前情報が反映される。