

3点識別試験

感覚差 d' のベイズ推定

日本女子大学名誉教授

岡本 安晴

2019.09

心理学 (Psychology)

心と行動の科学

Major subfields (Nolen-Hoeksema et al. ,2014)

Biological, Cognitive, Developmental, Social and personality,
Clinical and counseling, Social and educational,
Organizational and engineering

Cognitive neuroscience, Evolutionary, Cultural,
Behavioral epigenetics

計量心理学
Psychometrics

心の測定

精神物理学 / 心理物理学
Psychophysics

感覚の測定

計量心理学
Psychometrics

The diagram consists of three overlapping circles on a light yellow background. The top-left circle is labeled '計量心理学 Psychometrics' and '心の測定'. The top-right circle is labeled '心理物理学 Psychophysics' and '感覚の測定'. The bottom circle is labeled '信号検出理論 Signal Detection Theory (SDT)' and '感覚の微小な差の測定'. The circles overlap in the center, and the SDT circle overlaps with both the Psychometrics and Psychophysics circles.

心の測定

心理物理学
Psychophysics

感覚の測定

信号検出理論
Signal Detection Theory (SDT)

感覚の微小な差の測定

感覚の差の測定

感覚の弁別（検出）モデル

信号検出理論

Signal Detection Theory

3点識別試験

Triangular Test

d' : 感覚量の差

ベイズ分析（統計学）

Bayesian Analysis

信号検出理論

Signal Detection Theory: SDT

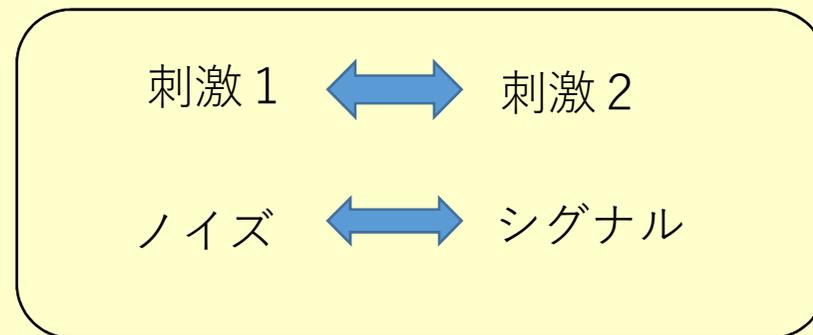
差が不確かである刺激の弁別（Discrimination）を扱う理論

Detection, Discrimination, Recognition,...

ノイズの中のシグナル： 検出（Detection）

ノイズ vs シグナルを含むノイズ： 弁別（Discrimination）

一般化



モデル構成

データの基本形

		反 応	
		シグナルである Yes	ノイズである No
提 示 刺 激	シグナル S	Hit H	Miss M
	ノイズ N	False Alarm FA	Correct Rejection CR

$$P(\text{Hit}) = P(\text{Yes}|S) \quad P(\text{Miss}) = P(\text{No}|S) = 1 - P(\text{Hit})$$

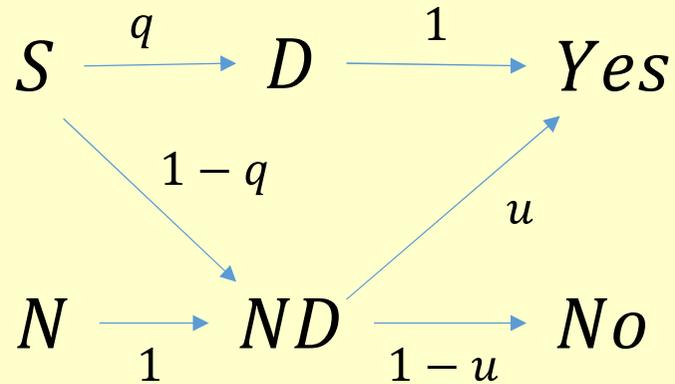
$$P(\text{FA}) = P(\text{Yes}|N) \quad P(\text{CR}) = P(\text{No}|N) = 1 - P(\text{FA})$$

個々の $P(\text{Hit})$ と $P(\text{FA})$ の値は、
感覚の弁別力と判断の基準の両方の影響を受ける

感覚の弁別力を一定にして判断の基準を変化させたときの点
($P(\text{FA}), P(\text{Hit})$)の軌跡： Receiver Operating Characteristic (ROC) curve,
Isosensitivity curve (Luce, 1963),
Relative Operating Characteristic curve (Swets, 1973)

ROC曲線の例

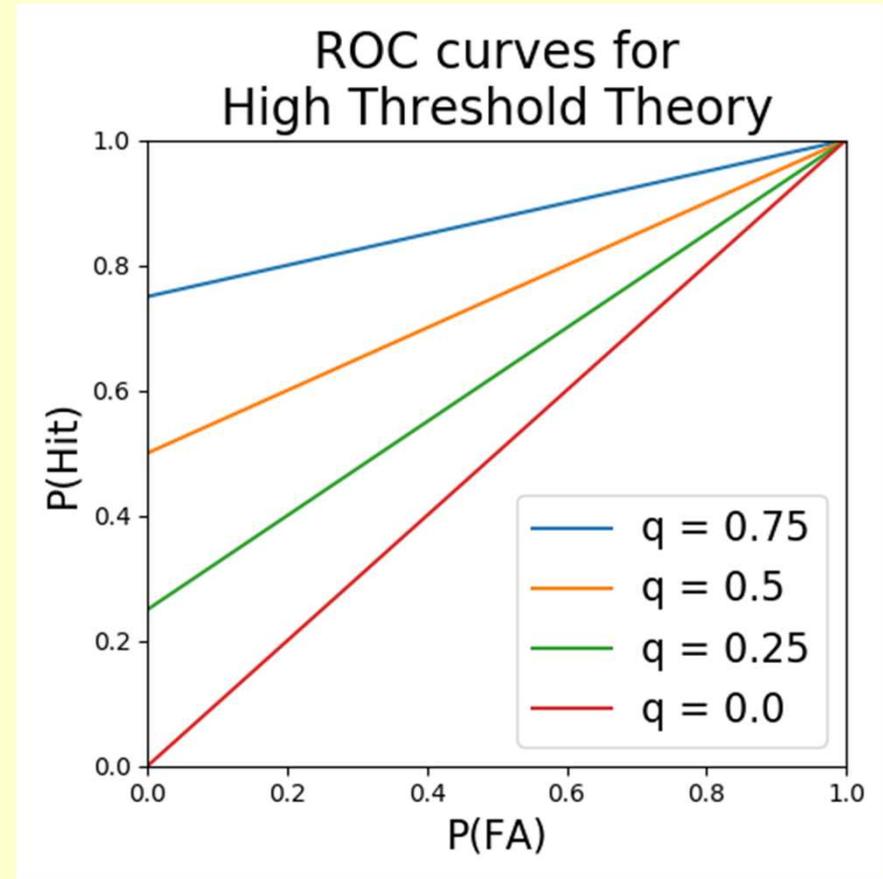
Single High-Threshold Theory (Macmillan & Creelman, 2005, Fig. 4.1より)



$$P(\text{Hit}) = q + (1 - q)u$$

$$P(\text{FA}) = u$$

$$P(\text{Hit}) = q + (1 - q)P(\text{FA})$$



Signal Detection Theory

等分散ガウス型モデル

正規分布 (Normal distribution, Gaussian distribution)

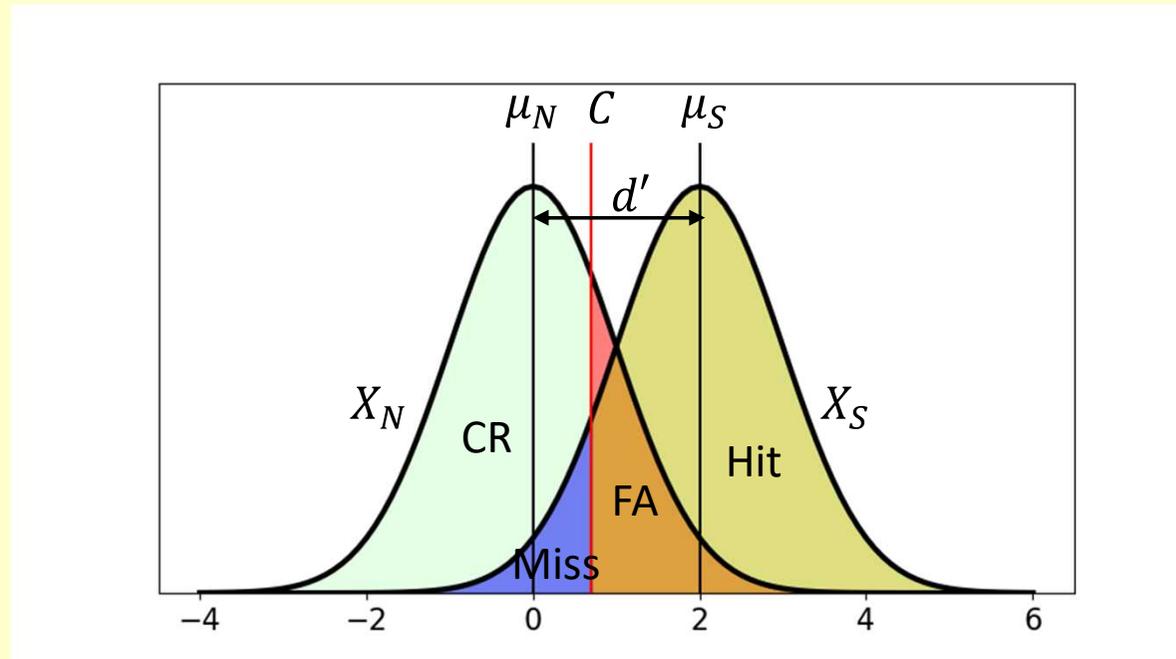
$$X_N \sim N(\mu_N, \sigma_N^2)$$

原点

$$\mu_N = 0$$

単位

$$\sigma_N = 1$$



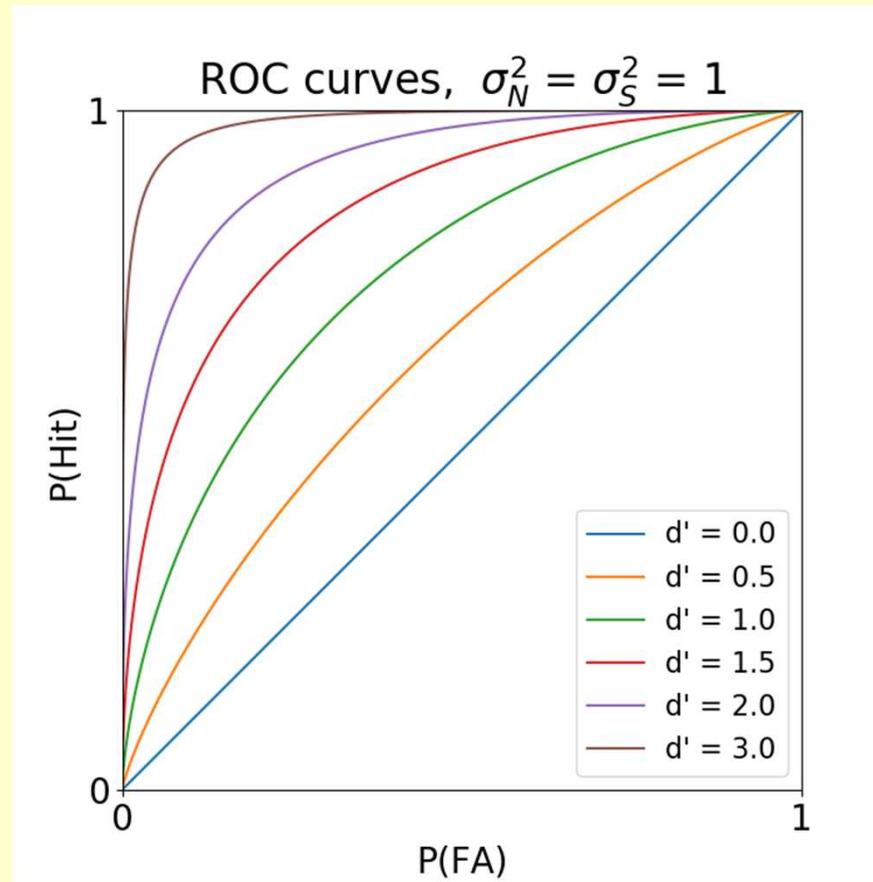
$$X_S \sim N(\mu_S, \sigma_S^2)$$

$$P(\text{Hit}) = P(X_S > C)$$

$$P(\text{FA}) = P(X_N > C)$$

ROC曲線 : d' を一定にして C を変化させたときの
点 $(P(\text{FA}), P(\text{Hit}))$ の軌跡

ROC曲線



弁別（検出）課題の分類

Kingdom & Prins, 2016, pp. 150-151

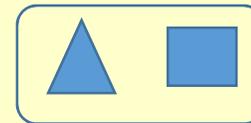
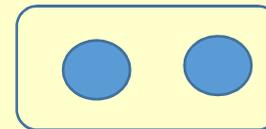
M-AFC	M: Number of stimulus alternatives per trial AFC: Alternative-Forced-Choice
N	Number of stimuli per trial
m	Number of response options per trial
Task	Yes/No, Standard two alternative forced-choice, Three alternative oddity (Triangular test), etc

例 1 1AFC, N=1, m=2 (Yes/no)



例 2 2AFC, N=4, m=2

Which pair? (Same-Different)



2AFC標準課題

ノイズ刺激とシグナル刺激の2つの刺激を提示してシグナル刺激を選ぶ

ノイズ刺激の感覚量 $X_N \sim N(\mu_N, \sigma^2)$

シグナル刺激の感覚量 $X_S \sim N(\mu_S, \sigma^2)$

感覚量の差 $\mu_S - \mu_N = d'$

シグナル刺激が選ばれるとき

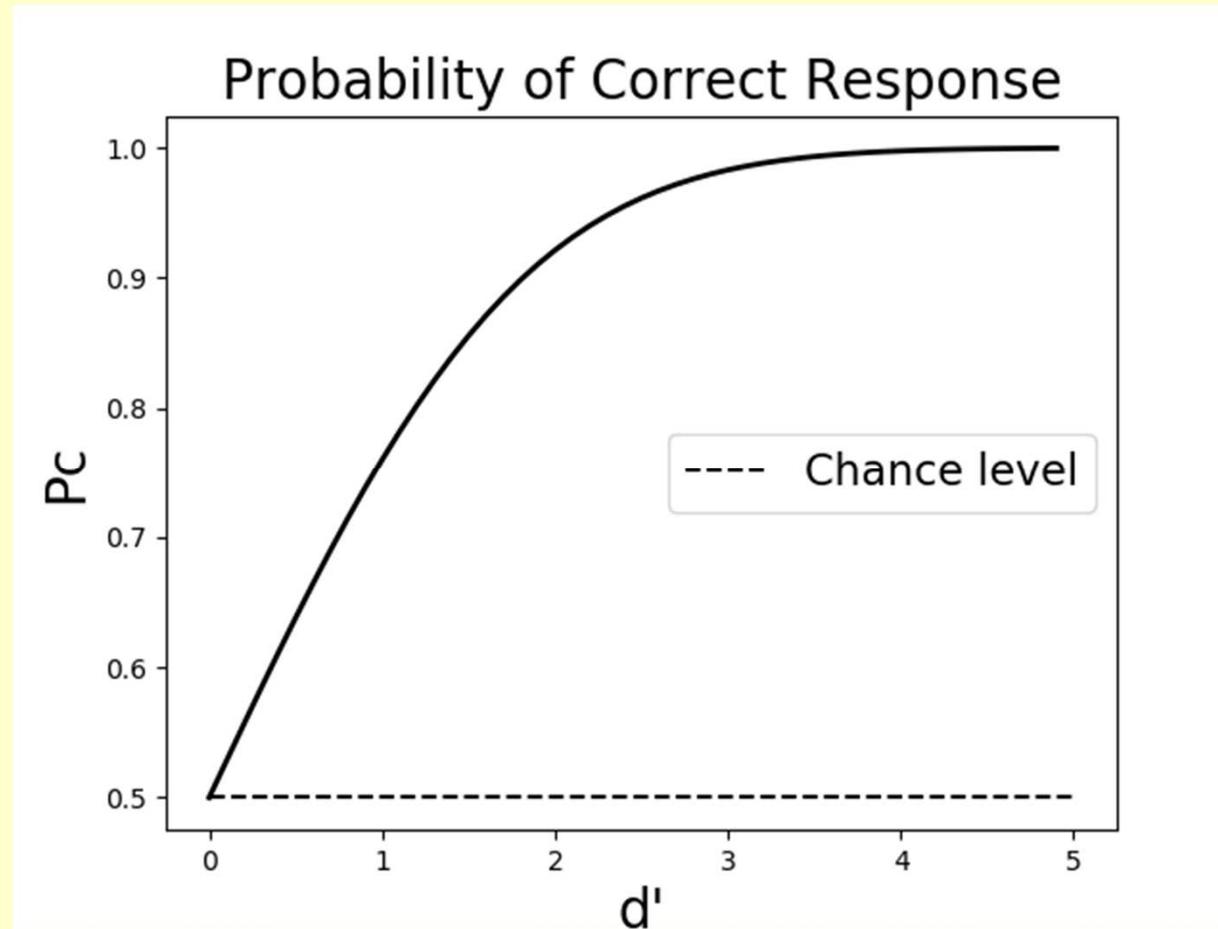
$X_S > X_N$, i.e. $X_S - X_N > 0$ のとき

正反応の確率

$$P_C = P(X_S - X_N > 0) = \Phi(d'/\sqrt{2})$$

$\Phi(z)$ 累積標準正規分布関数

感覚量の差 d' と正答確率 P_C の関係



3点識別試験 (Triangular Test)

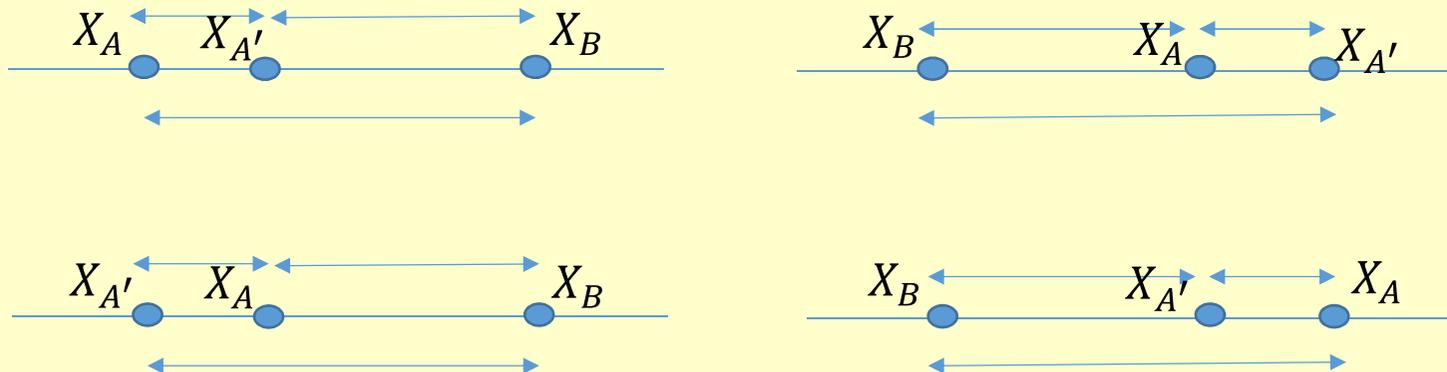
3AFC Oddity Task

2つの同じ刺激AとA'、および少し異なる刺激Bの3つの刺激を提示
他の2つと異なる1つを選ぶ

$$A: X_A \sim N(\mu, \sigma^2) \quad A': X_{A'} \sim N(\mu, \sigma^2) \quad B: X_B \sim N(\mu + d', \sigma^2)$$

Bが選ばれるとき

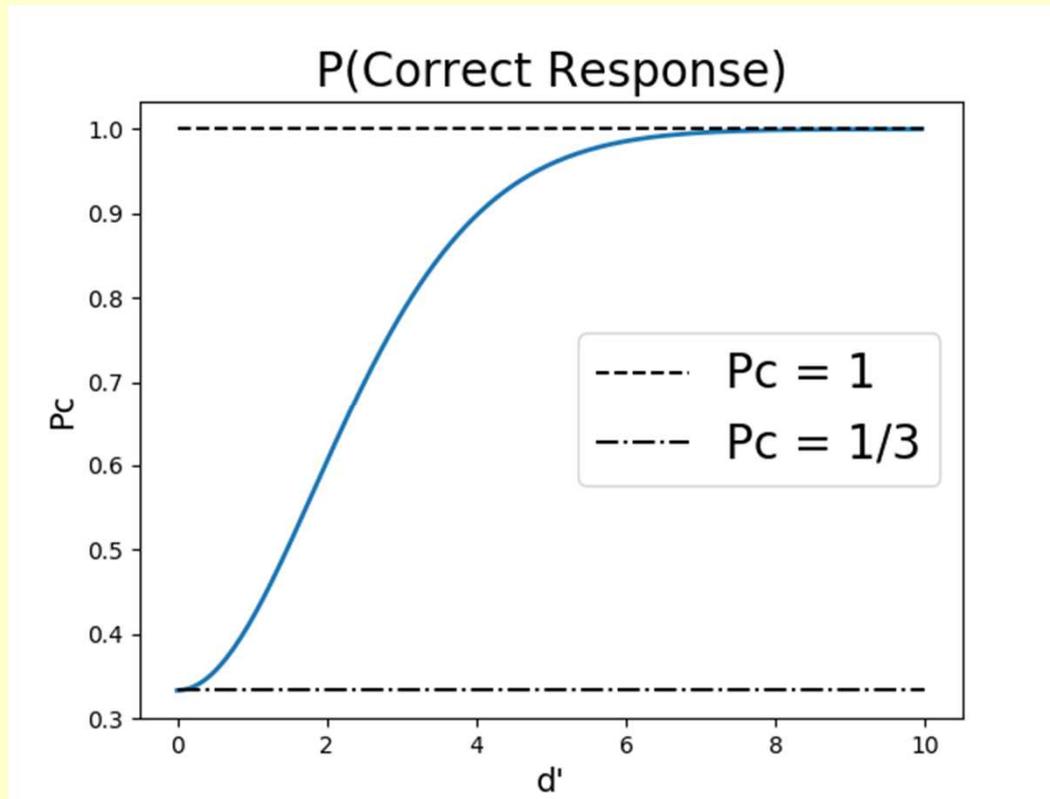
$$|X_A - X_{A'}| < |X_A - X_B| \quad \text{かつ} \quad |X_A - X_{A'}| < |X_{A'} - X_B|$$



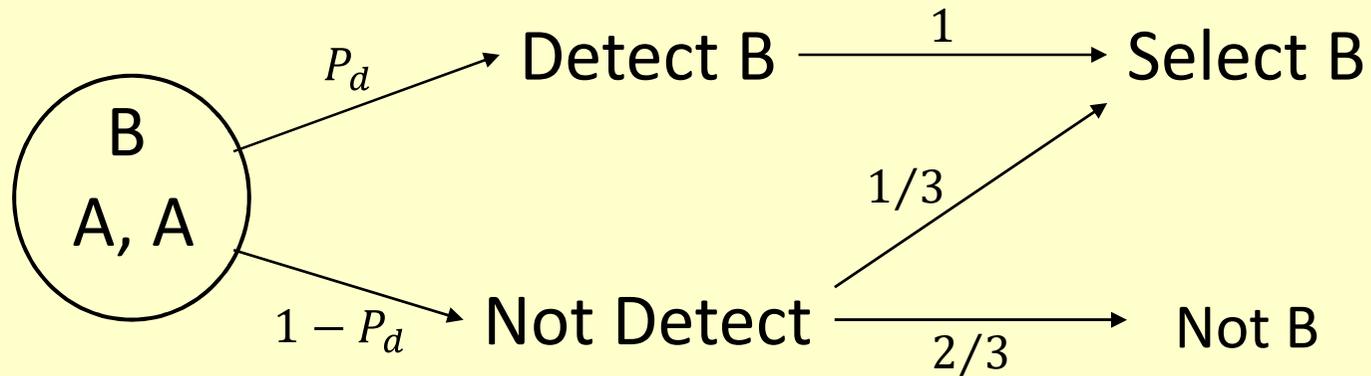
正しく B が選ばれる確率 P_C

Frijters et al. (1980). Perception & Psychophysics, 27, 176-178.

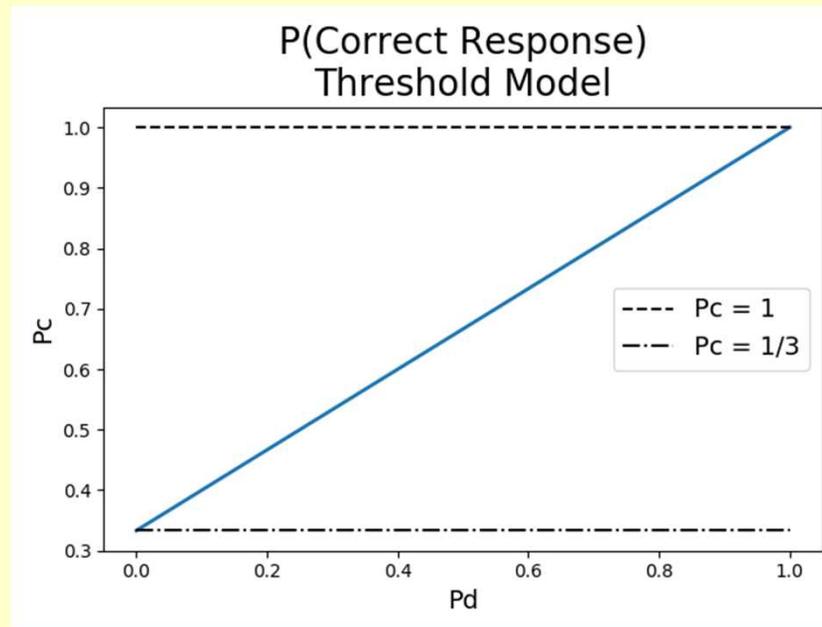
$$P_C = 2 \int_0^{\infty} \left[\Phi \left(-u\sqrt{3} + d'\sqrt{2/3} \right) + \Phi \left(-u\sqrt{3} - d'\sqrt{2/3} \right) \right] e^{-1/2 \cdot u^2} / \sqrt{2\pi} du$$



3点識別試験 閾値モデル



正答確率 $P_C = P_d + (1 - P_d) \frac{1}{3}$



3点識別試験確率モデル

データ数 N

正答数 k

正答確率 P_C

二項分布

$$P(k|P_C) = \binom{N}{k} P_C^k (1 - P_C)^{N-k}$$

事後分布

$$P(P_C|k) \propto P_0(P_C)P(k|P_C)$$

信号検出理論：パラメータ d' (感覚差)

$$P_C = 2 \int_0^{\infty} \left[\Phi(-u\sqrt{3} + d'\sqrt{2/3}) + \Phi(-u\sqrt{3} - d'\sqrt{2/3}) \right] e^{-1/2 \cdot u^2} / \sqrt{2\pi} du$$

Frijters, J. E. R. et al. (1980). *Perception & Psychophysics*, 1980, 27, 176-178.

閾値モデル：パラメータ P_d (検出確率/比率)

$$P_C = P_d + (1 - P_d) \frac{1}{3}$$

パラメータの推定

データ数 N

正答数 k

正答確率 P_C

二項分布 $P(k|P_C) = \binom{N}{k} P_C^k (1 - P_C)^{N-k}$

信号検出理論：パラメータ d' (感覚差)

$$P_C(d') = 2 \int_0^{\infty} \left[\Phi(-u\sqrt{3} + d'\sqrt{2/3}) + \Phi(-u\sqrt{3} - d'\sqrt{2/3}) \right] e^{-1/2 \cdot u^2} / \sqrt{2\pi} du$$

$$d' \longrightarrow P_C \longrightarrow P(k|P_C) = P(k|d')$$

事後分布 $P(d'|k) \propto P_0(d')P(k|d')$

ベイズ分析

Thomas Bayes. (1763).

An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances.

確率probabilityとは？

哲学的観点： Bayesian vs Frequentist

Degree of belief (主観的確率, subjective probability)

Bernoulli (1713), De Morgan (1847)

ヒルベルト前の数学

哲学的アプローチ

1とは？

1 + 1とは？

Degree of Belief
vs
Relative Frequency

ヒルベルト後の数学

公理的アプローチ

公理を満たす系と
現実との対応は
数学とは別問題

確率が満たすべき公理

確率とは

数学的観点

測度論的確率

$$(i) P(E) \geq 0$$

$$(ii) P(\cup E_i) = \sum P(E_i), \quad E_i \cap E_j = \emptyset$$

$$(iii) P(\Omega) = 1$$

ベイズ分析の基本モデル

$$P(\text{データ}, \text{パラメータ}) = P(\text{データ} | \text{パラメータ})P(\text{パラメータ})$$

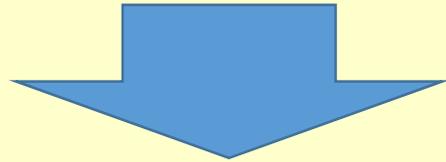
$$P(\text{データ}, \text{モデル}) = P(\text{データ} | \text{モデル})P(\text{モデル})$$

数理モデルの歴史的流れ

ニュートン物理学

方程式の根

ユークリッド空間



現代物理学

非ユークリッド空間

自然数



整数



有理数



実数



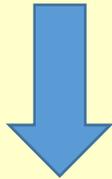
複素数

統計モデルの進化

記述統計： データの分布の記述
推測・推定はない



データ生成モデル： $P(\text{データ} \mid \text{モデル})$
データからモデルのパラメータを推定
モーメント法、最尤法



データとモデルの同時確率：

$$P(\text{データ}, \text{モデル}) = P(\text{データ} \mid \text{モデル})P(\text{モデル})$$

条件付確率 (Bayes' theorem) : $P(\text{モデル} \mid \text{データ}) = \frac{P(\text{データ}, \text{モデル})}{P(\text{データ})}$

ベイズ分析

ベイズ分析・ベイズ統計学

Bayesian Analysis/Bayesian Statistics

確率モデル：

パラメータ・モデル θ とデータ D の同時確率

$$P(\theta, D) = P(\theta)P(D|\theta)$$

同時確率・分布

事前確率

データ生成モデル

事後確率： D を条件とする θ の条件付確率（ベイズの定理）

$$P(\theta|D) = \frac{P(\theta, D)}{P(D)} = \frac{P(\theta)P(D|\theta)}{P(D)} \propto P(\theta)P(D|\theta)$$

$$P(\theta|D) \propto P(\theta)P(D|\theta)$$

$P(D|\theta)$ は、 D を固定して θ の関数として見たときは尤度関数 $L(\theta|D)$ と呼ばれる。

$$\text{すなわち、 } P(\theta|D) \propto P(\theta)L(\theta|D)$$

ベイズ分析では、
データ D に含まれる情報は
事後分布 $P(\theta|D)$ に反映される。

例 2 項分布

コイン投げ・3点試験法

N 回の試行において k 回表が出た（正答であった）。

各試行における表が出る（正答である）確率： p 各試行は独立

$$P(k|N, p) = P(k|p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

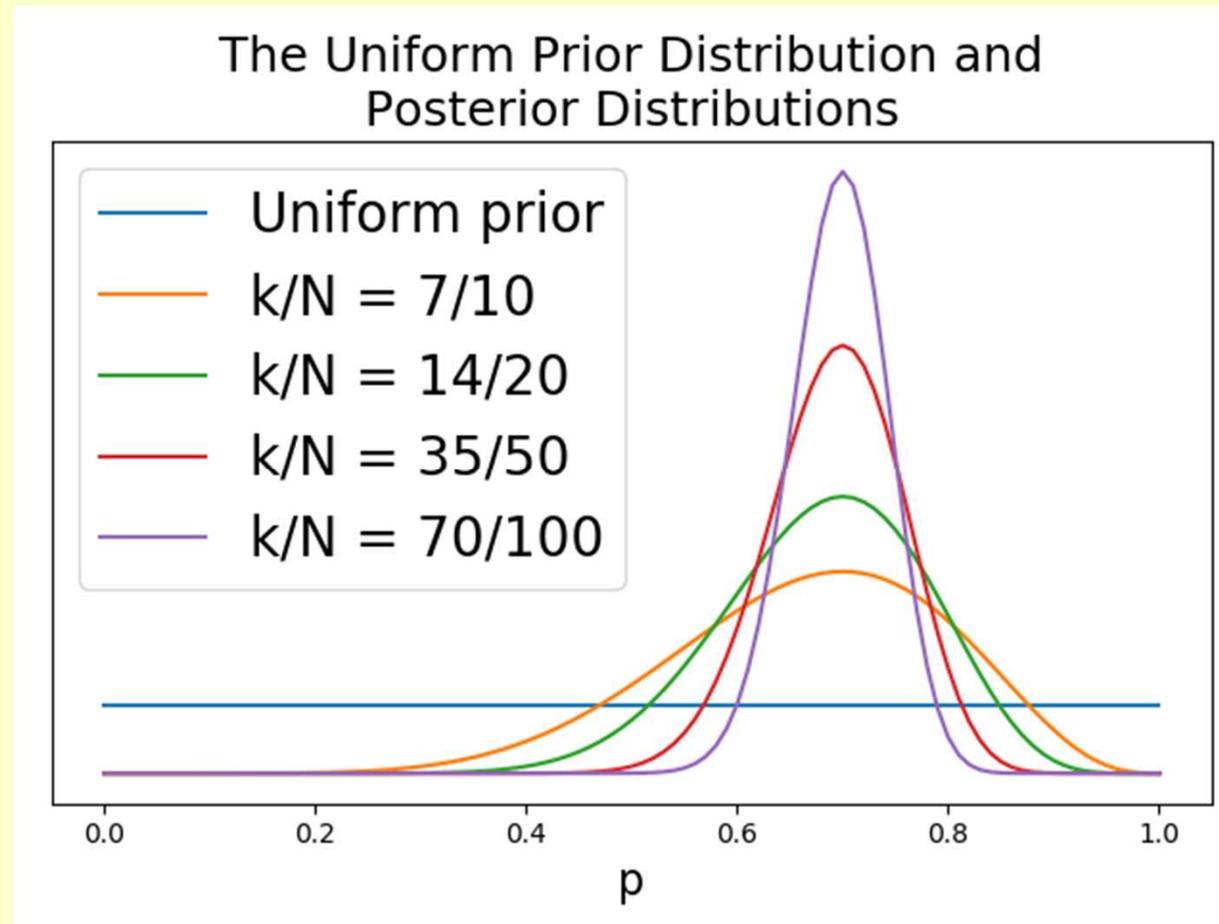
$$P(p, k) = P(p)P(k|p)$$

$$P(p|k) = \frac{P(p, k)}{P(k)} = \frac{P(p)P(k|p)}{P(k)} \propto P(p)P(k|p)$$

$$P(p) = \text{一定} \quad P(k|p) \propto p^k (1-p)^{N-k}$$

$$P(p|k) \propto p^k (1-p)^{N-k}$$

事後確率： $P(p|k) \propto p^k(1-p)^{N-k}$



データ D_1 、 D_2 の蓄積

データ D_1 と事前確率 $P_0(\theta)$ による事後確率

$$P_1(\theta|D_1) \propto P_0(\theta)P(D_1|\theta)$$

データ D_2 を、事前確率として事後確率 $P_1(\theta|D_1)$ を用いて分析

$$P_2(\theta|D_2) \propto P_1(\theta|D_1)P(D_2|\theta) \propto P_0(\theta)P(D_1|\theta)P(D_2|\theta)$$

データ D_1 と D_2 に対して事前確率 $P_0(\theta)$ による事後確率

$$P_{1,2}(\theta|D_1, D_2) \propto P_0(\theta)P(D_1, D_2|\theta)$$

$P(D_1, D_2|\theta) \propto P(D_1|\theta)P(D_2|\theta)$ (条件 1) が成り立つとき

$$\begin{aligned} P_{1,2}(\theta|D_1, D_2) &\propto P_0(\theta)P(D_1, D_2|\theta) \propto P_0(\theta)P(D_1|\theta)P(D_2|\theta) \\ &\propto P_2(\theta|D_2) \end{aligned}$$

条件 1 が成り立つとき、データ D_1 と D_2 を一度に用いた分析と、1 つずつ順番に用いた分析は、同じ事後分布を得る。

デー々蓄積例

実験 1 : N_1 回の試行において k_1 回正答

$$P_1(p|k_1) \propto P_0(p)P_{N_1}(k_1|p) \propto P_0(p)p^{k_1}(1-p)^{N_1-k_1}$$

実験 2 : N_2 回の試行において k_2 回正答

$$P_2(p|k_2) \propto P_1(p|k_1)P_{N_2}(k_2|p) \propto P_0(p)p^{k_1+k_2}(1-p)^{N_1+N_2-k_1-k_2}$$

実験 1 + 実験 2 : $N_1 + N_2$ 回の試行において $k_1 + k_2$ 回正答

$$P_{1,2}(p|k_1 + k_2) \propto P_0(p)P_{N_1+N_2}(k_1 + k_2|p) \propto P_0(p)p^{k_1+k_2}(1-p)^{N_1+N_2-k_1-k_2}$$

$$P_{N_1+N_2}(k_1 + k_2|p) \propto p^{k_1+k_2}(1-p)^{N_1+N_2-k_1-k_2}$$

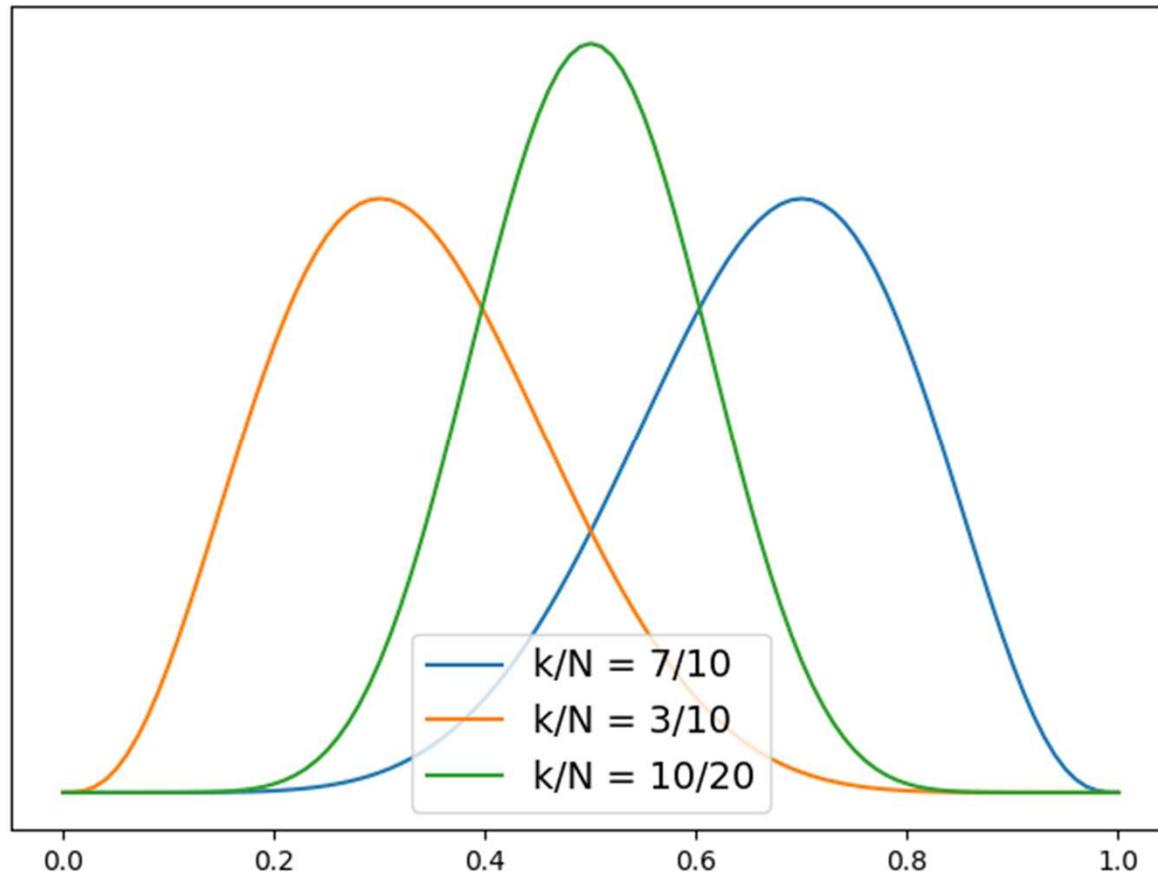
$$P_{N_1}(k_1|p) \propto p^{k_1}(1-p)^{N_1-k_1} \quad P_{N_2}(k_2|p) \propto p^{k_2}(1-p)^{N_2-k_2}$$

$$P_{N_1+N_2}(k_1 + k_2|p) \propto P_{N_1}(k_1|p) P_{N_2}(k_2|p)$$

実験 1
 $N=10, k=7$

実験 2
 $N=10, k=3$

実験 2 / 実験 1
 $(N=10, k=3)/(N=10, k=7)$

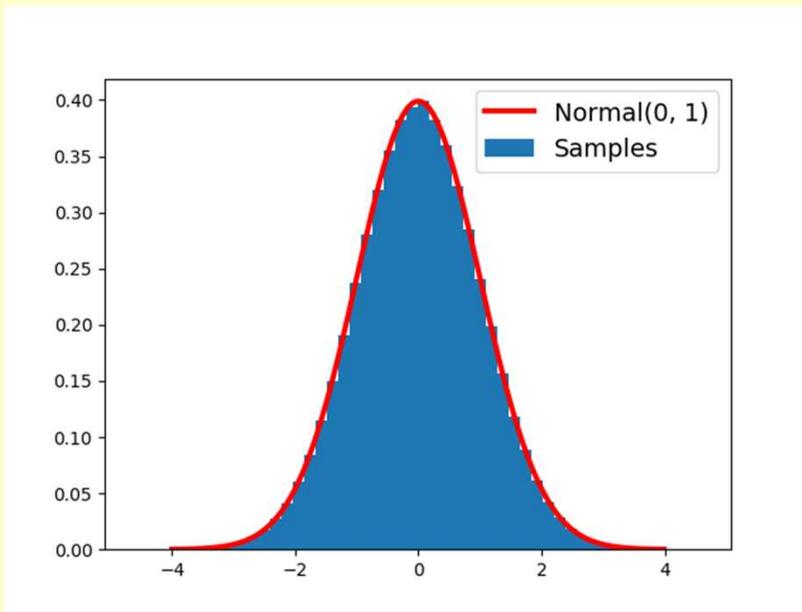


実験 1 + 実験 2
 $N=10+10, k=7+3$

確率分布の推定

乱数のサンプリングによる推定

$$X_i \sim N(0, 1)$$



```
xvalues = np.arange(-4.0, 4.0, 0.01)
yvalues = ss.norm.pdf(xvalues)
samples = ss.norm.rvs(size = 1000000)
plt.hist(samples, bins = 50, density = True,
label = 'Samples')
plt.plot(xvalues, yvalues, 'r-', linewidth = 3,
label = 'Normal(0, 1)')
plt.legend(fontsize = 14)
plt.show()
```

乱数 $X_i \sim$ 確率分布 X_i : 独立

疑似乱数 $X_i \sim$ 確率分布 生成 : プログラムの実行で生成
決定論的

見かけ : 統計学的に独立。
e.g. 自己相関が 0

MCMC (Markov chain Monte Carlo)

$$X_t \longrightarrow X_{t+1} \quad X_{t+1} \sim P(X|X_t)$$

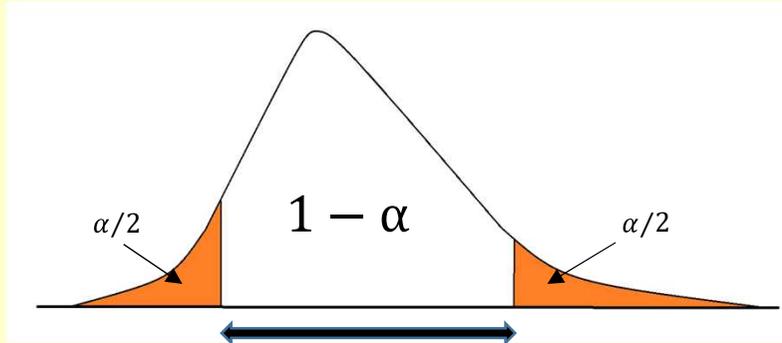
$\{X_{s+t}\}; t = 0, \dots, u$ \longrightarrow 確率分布
集合としての分布 $s \rightarrow \infty$
 $u \rightarrow \infty$

Metropolis-Hastings algorithm

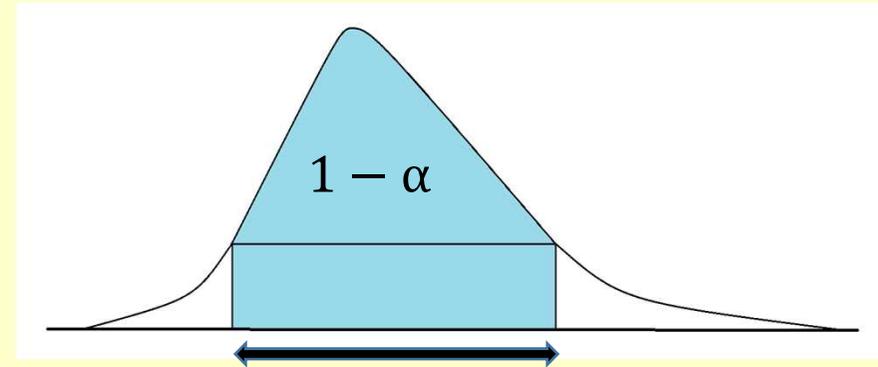
3点識別試験における d' の事後分布

```
for t in range(self.n_samples):
    y = rn.normalMS(self.chain[t], self.sgm)
    accpt = -1.0
    if 0.0 <= y and y <= 10.0:
        num = self.LL(y)
        den = prev_LL
        accpt = math.exp(num - den)
    if rn.uni() < accpt:
        self.chain[t + 1] = y
        self.naccpt += 1
        prev_LL = num
    else:
        self.chain[t + 1] = self.chain[t]
        prev_LL = den
```

分布の記述



$(1 - \alpha)$ 100%CI(Credible Interval) 確信区間



$(1 - \alpha)$ 100%HPD(Highest Posterior Density)区間

平均値

MAP (Maximum A Posteriori) 推定値

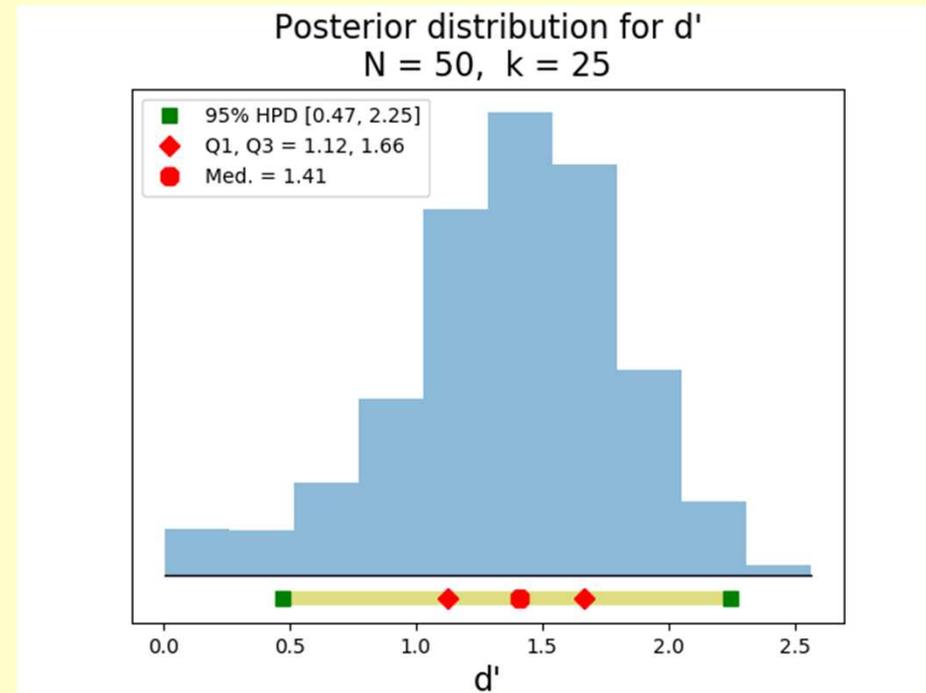
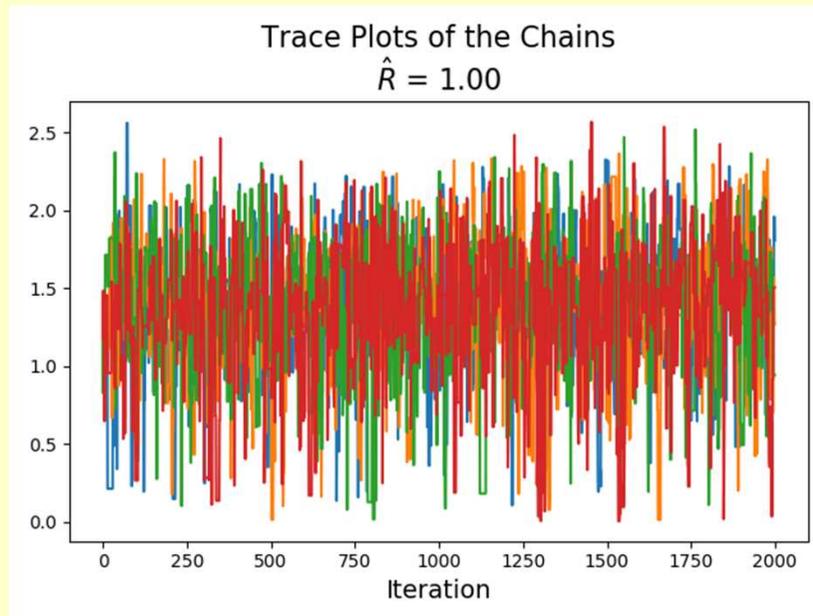
中央値

四分位数

3点識別試験における d' の事後分布

http://y-okamoto-psy1949.la.coocan.jp/Python/misc/TriangularTest_dprime/

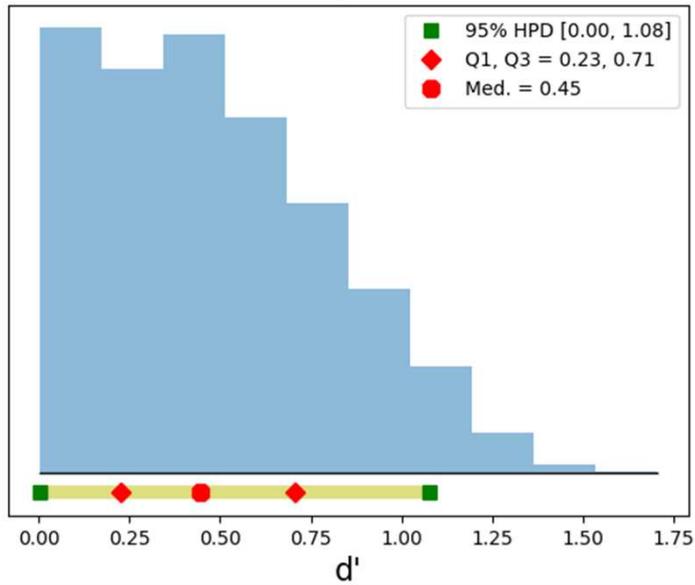
$N = 50, \quad k = 25$



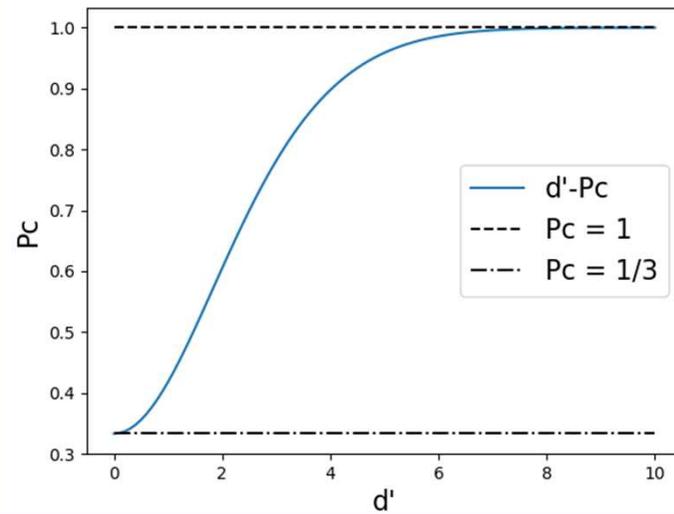
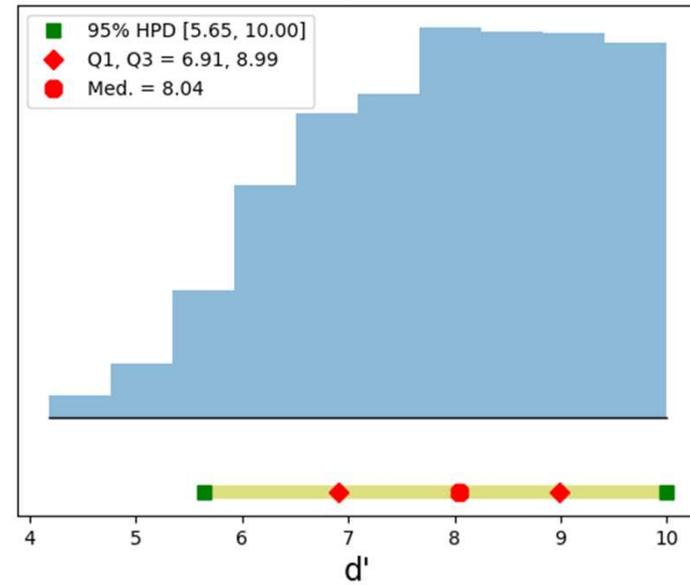
$$d' = 0,$$

$$10 < d'$$

Posterior distribution for d'
 $N = 50, k = 15$

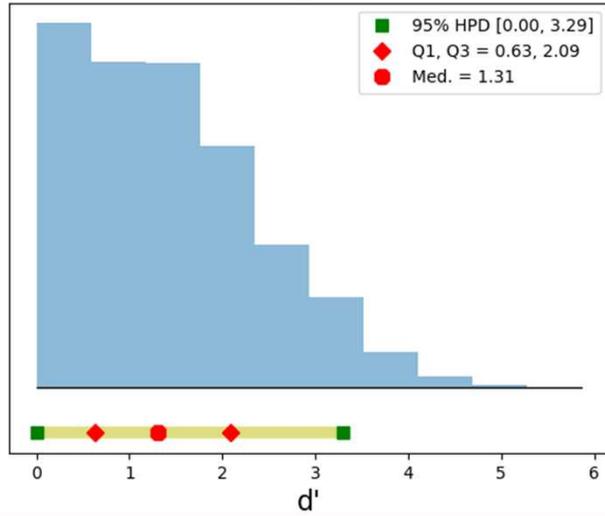


Posterior distribution for d'
 $N = 50, k = 50$

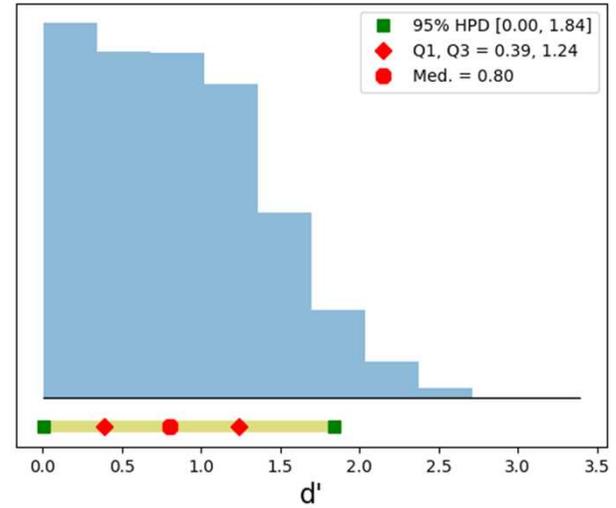


データサイズ

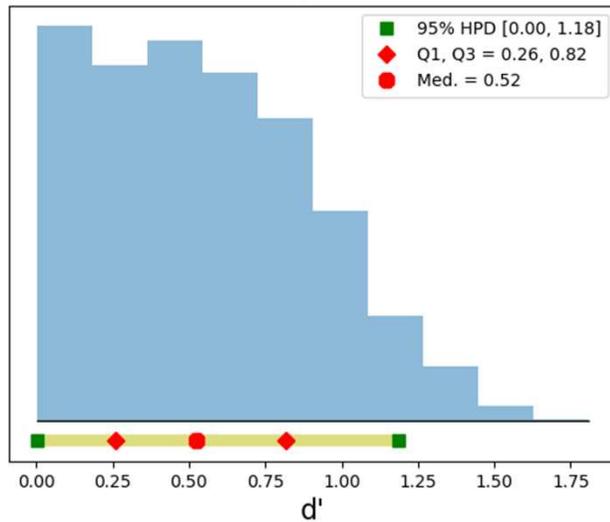
Posterior distribution for d'
 $N = 3, k = 1$



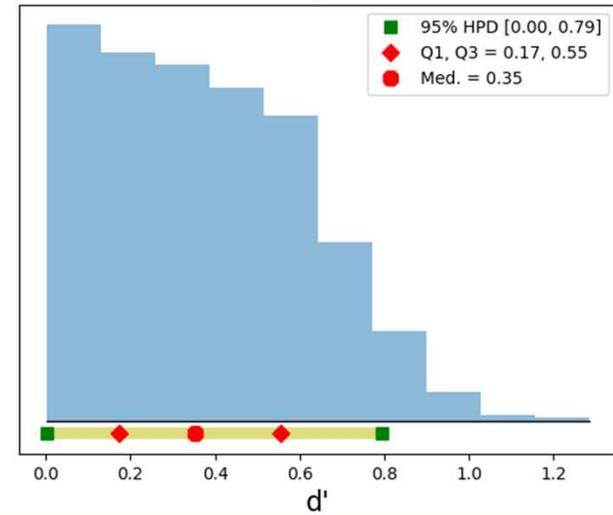
Posterior distribution for d'
 $N = 12, k = 4$



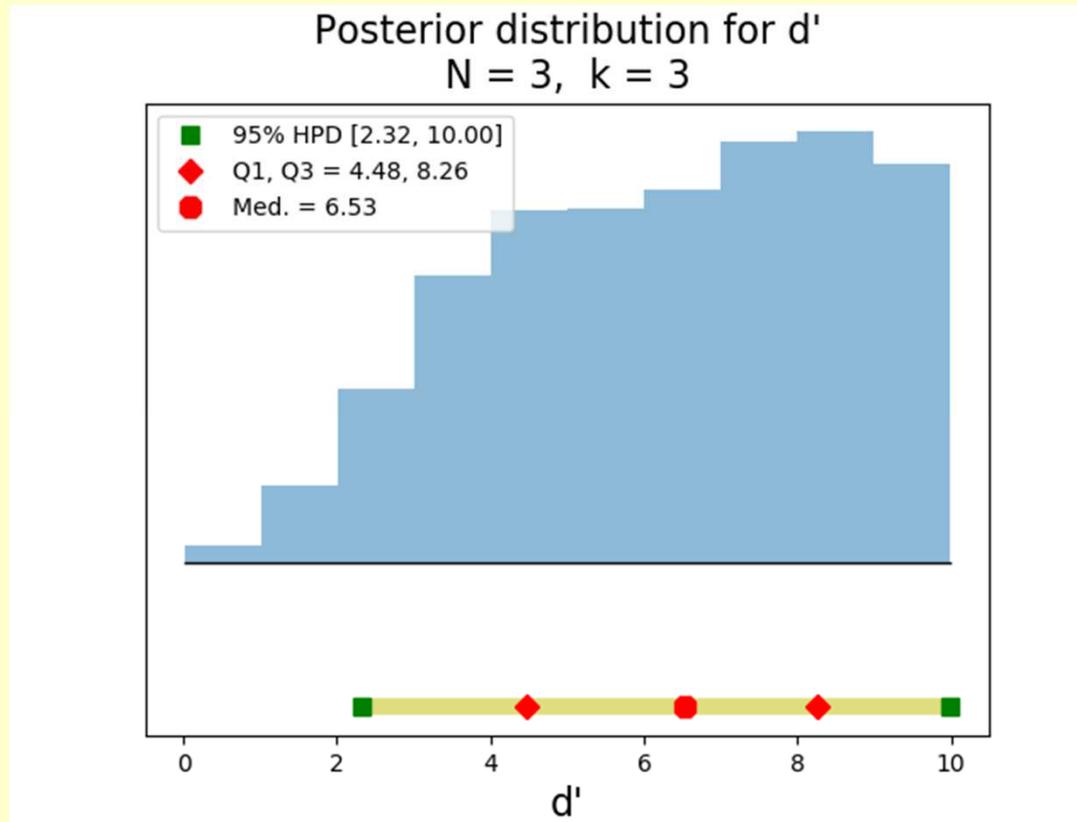
Posterior distribution for d'
 $N = 48, k = 16$



Posterior distribution for d'
 $N = 192, k = 64$



$$d' > 1$$



d' と 確率

1AFC Yes/No

$$P(\text{Hit}) = \Phi(d' - C)$$

$$P(\text{FA}) = \Phi(-C)$$

$$C = \frac{d'}{2}$$

2AFC Standard

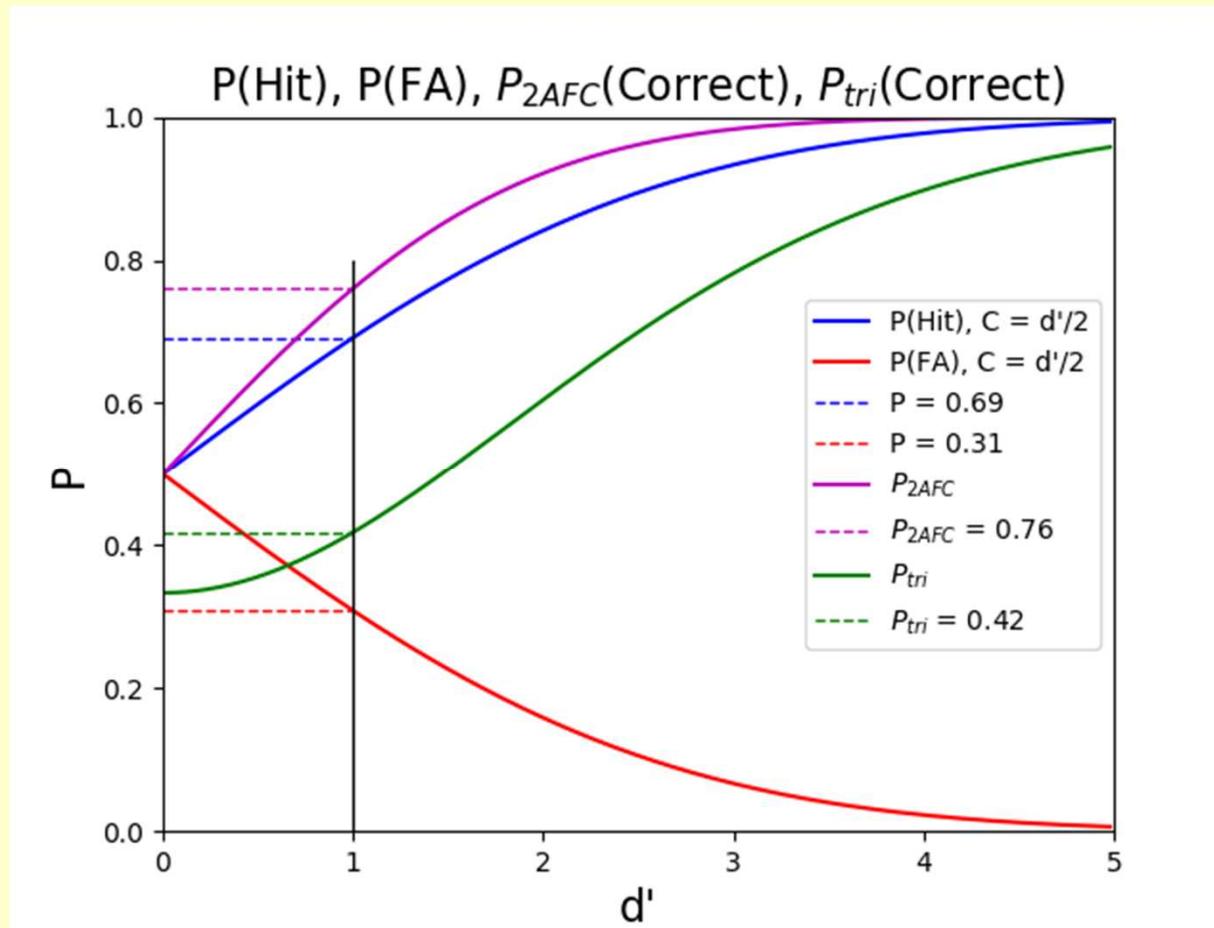
$$P(\text{Correct}) = \Phi(d'/\sqrt{2})$$

3AFC Oddity, i.e. $P(\text{Correct})$

Triangular Test

$$= 2 \int_0^{\infty} \left[\Phi(-u\sqrt{3} + d'\sqrt{2/3}) + \Phi(-u\sqrt{3} - d'\sqrt{2/3}) \right] e^{-1/2 \cdot u^2} / \sqrt{2\pi} du$$

d' と正答 (Yes) 確率



総試行数 N の構成

1 試行：	$\{A_1, A_2, B\}$	$\xrightarrow{\text{選ぶ}}$	X	$X = A_1 \text{ or } A_2 \text{ or } B$
				$X = B$: 正解

d' : 固定の場合

I : 1 人が N 試行

II : 同じ特性の評価者が N 人。各人 1 試行

III : 同じ特性の評価者 i が N_i 試行。 $N = \sum N_i$

などなど. . .

d' : 変動の場合 e.g. $d'_j \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

I : 1人が各条件 j で各 N_j 回

$$N = \sum N_j$$

II : 異なる特性の評価者 i が各人 N_i 回

$$N = \sum N_i$$

III : 特性 i の評価者 i が条件 j で N_{ij} 回

$$N = \sum N_{ij}$$

などなど. . .

確率モデルは、条件に合わせて設定する。

なぜベイズ分析？

1. 有意差検定は、 $d' = 0$ に関するall-or-nothingの情報のみである。ベイズ分析では d' はどの程度の値であるのかが示される。

信号検出理論（ガウス型モデル）では、当該の次元で異なる刺激間の d' は0ではない。この場合に、帰無仮説「 $d' = 0$ 」の棄却は、棄却に必要なデータ数が不足していることを意味する。十分に多くのデータを集めれば、帰無仮説「 $d' = 0$ 」は棄却されることになる。したがって、「 $d' = 0$ 」であるかどうかを調べるのではなく、「 d' はどの程度小さいか」を推定することが信号検出理論の観点からは意味のある問題となる。

この推定「 d' はどの程度小さいか」は、ベイズ分析により得られる。ベイズ分析では、 d' の事後分布として得られるので、得られた推定値の分布が十分にまとまったものでない場合は、データを増やして分布の広がりが小さくなることが期待される。

「 $d' = 0.5, Pc \approx 0.356$ 」のときを考える。

帰無仮説「 $d' = 0, Pc = 1/3$ 」、片側検定「 $d' > 0?$ 」

$N = 10, k = 3$ \longrightarrow $p - value \approx 0.701$ 非有意

$N = 10, k = 4$ \longrightarrow $p - value \approx 0.440$ 非有意

$N = 2000, k = 712$ \longrightarrow $p - value \approx 0.017$ 有意

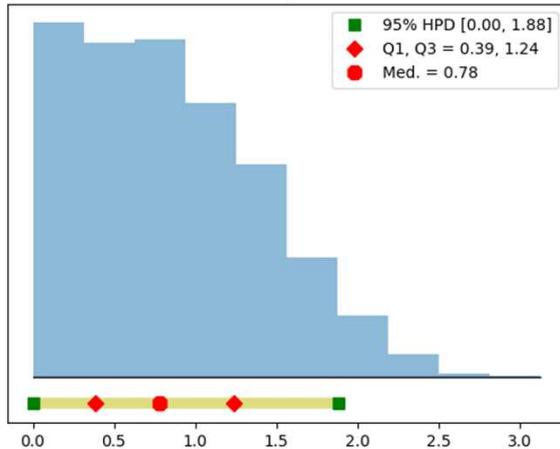
同じ d' の値であっても、データ数が少ないと帰無仮説「 $d'=0$ 」は棄却できないが、データ数を大きくすると棄却される。

「 $d' = 0.5$, $Pc \approx 0.356$ 」のときを考える。

ベイズ分析

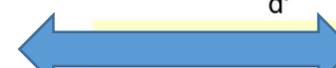
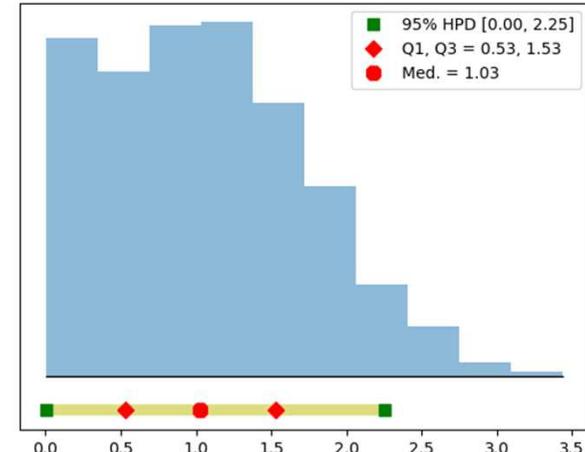
真値 $d' = 0.5$
がデータ数に
関わらず95%
区間に含まれ
ている

Posterior distribution for d'
N = 10, k = 3



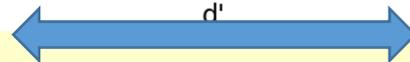
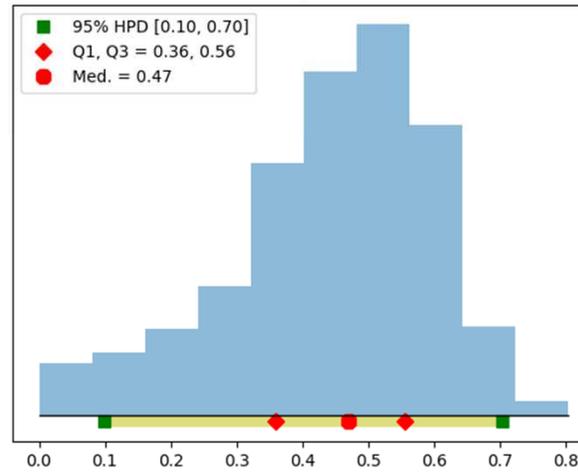
広い

Posterior distribution for d'
N = 10, k = 4



広い

Posterior distribution for d'
N = 2000, k = 712



予稿20190909 狭い

なぜベイズ分析？

2. データが追加されたときの分析が用意。
3. 複数の条件で d' を求めるとき、
 $d' = \text{条件}j$ の回帰モデル
の形で分析すれば、 d' のある値 d'_k に対応する条件 k を
推測することができる。

例えば、条件 j が変量 X_j で表されているとき、
 $d'_j = \exp(\alpha + \beta X_j)$
とおいて α と β を求めれば、
 $d'_k = \exp(\alpha + \beta X_k)$
となる X_k を推測することができる。

最尤法による推定も考えられるが、最尤法は漸近定理に基づく方法であるので、データ数が十分に多いという前提がある。
ベイズ分析には、データ数の条件が無い。

まとめ

1. 感覚量の差 d' をパラメータとする3点識別試験データのモデルから、 d' の事後分布の式が与えられる。
2. d' の事後分布は、MCMCにより簡単に推定できる。
3. 事後分布の広がりが大き過ぎるときは、分布の広がりを小さくするために、データを追加して分析することができる。

関連資料： 岡本安晴「心理学データ分析と測定」勁草書房