

カテゴリ型項目のベイズ的信頼性推定

○岡本安晴

日本女子大学人間社会学部

1 はじめに

心理学においては、尺度項目の回答（反応）形式は7選択肢などカテゴリ型であることが普通である。また、その分析は、項目反応理論ではなく、因子分析と信頼性係数の算出によって行われることが多い。複数の項目からなるテストにおいては、その構造を例えばまず因子分析によって調べることは必要な手続きであり、1因子構造を仮定した項目反応理論をいきなり適用することはできない。因子分析によりテスト項目群を下位尺度群にグループ分けして、その後の分析は項目反応理論ではなく、 α 係数による信頼性の検討という形で行われるのが普通である。心理学研究における多くのデータは項目反応理論を適用するには小さ過ぎるということ、および広く使われている統計パッケージによって α 係数は容易に算出されるという事情によるものと思われる。小規模データの場合、データのサイズに応じた分析結果は、ベイズ的分析方法では事後分布に反映され、データに含まれる情報量に応じた推定を行うことができるが、ベイズ的方法による信頼性係数 ω を求める試みは岡本（2011、2012）で報告してきた。 α 係数を用いることの問題点は、データの真の構造（母集団モデル）が α 係数の前提条件を満たすとき、推定値としての α 係数は真の信頼性係数の値より大きい値を容易にとりえること、項目の回答形式が「はい／いいえ」のように2値である場合、 α 係数は真値の他の推定値（ ω 係数のベイズ的推定値；岡本、2011、2012）と比べて過度に小さくなることがあげられる。従って、 α 係数ではなく ω 係数が用いられるべきであるが、2値項目の場合、モデルの同定性による制約が強い（parallel items）。より一般的条件のもとで信頼性係数の推定を行うためには、項目の回答選択肢数を3以上にする必要がある。以下に、選択肢数が3以上の場合のモデルと、それによるベイズ的分析法としてのMCMCのアルゴリズムを提案する。

2 モデル

McDonald (1999)に従い、1因子モデル

$$X_{ij} = \mu_j + \lambda_j F_i + E_{ij} \quad (1)$$

を設定する。 μ_j 、 λ_j は項目 j に対する定数、 F_i は回答者 i の因子得点であり、 $F_i \sim N(0, 1)$ であるとする。 E_{ij} は、いわゆる誤差項であり、 F_i と独立な確率変数で、 $E_{ij} \sim N(0, \sigma_j^2)$ とする。このとき、テスト得点 X_{ij} の和 $X_i = \sum_{j=1}^n X_{ij} = \sum_{j=1}^n \mu_j + F_i \sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{j=1}^n E_{ij}$ の信頼性係数 ρ は次式（McDonald (1999)の ω ）で与えられる。

$$\rho = \frac{\text{Var}(\sum_{j=1}^n \mu_j + F_i \sum_{j=1}^n \lambda_j)}{\text{Var}(\sum_{j=1}^n \mu_j + F_i \sum_{j=1}^n \lambda_j) + \text{Var}(\sum_{j=1}^n E_{ij})} = \frac{(\sum_{j=1}^n \lambda_j)^2}{(\sum_{j=1}^n \lambda_j)^2 + \sum_{j=1}^n \sigma_j^2} \quad (2)$$

カテゴリ境界 C_k を $-\infty = C_0 < C_1 < \dots < C_{K-1} < C_K = +\infty$ と設定し、 X_{ij} の値と C_k との関係より、回答選択肢 Y_{ij} が次式

$$C_{k-1} < X_{ij} \leq C_k \quad \text{のとき、} \quad Y_{ij} = k$$

により決まるものとする。このとき、 μ_j 、 λ_j 、 F_i 、 σ_j 、 C_k の値に対して

$$X_{ij} \sim N(\mu_j + \lambda_j F_i, \sigma_j^2)$$

であり、

$$\begin{aligned} P(Y_{ij} = k | \mu_j, \lambda_j, F_i, \sigma_j, C_1 \dots C_{K-1}) &= P(C_{k-1} < X_{ij} \leq C_k | \mu_j, \lambda_j, F_i, \sigma_j, C_1 \dots C_{K-1}) \\ &= \Phi\left(\frac{C_k - (\mu_j + \lambda_j F_i)}{\sigma_j}\right) - \Phi\left(\frac{C_{k-1} - (\mu_j + \lambda_j F_i)}{\sigma_j}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここで、 $\Phi(z)$ は累積標準正規分布関数で、 $\Phi(-\infty) = 0$ 、 $\Phi(+\infty) = 1$ とおく。

以上の仮定の下で、データ Y_{ij} に対する尤度関数は次式で与えられる。

$$L(F_1 \dots F_m \mu_1 \dots \mu_n \lambda_1 \dots \lambda_n C_1 \dots C_{K-1} \sigma_1 \dots \sigma_n | Y_{11} \dots Y_{mn}) \propto \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n P(Y_{ij} | \mu_j, \lambda_j, F_i, \sigma_j, C_1 \dots C_{K-1})$$

したがって、事後確率は

$$\begin{aligned} &P(F_1 \dots F_m \mu_1 \dots \mu_n \lambda_1 \dots \lambda_n C_1 \dots C_{K-1} \sigma_1 \dots \sigma_n | Y_{11} \dots Y_{mn}) \\ &\propto p_0(F_1 \dots F_m \mu_1 \dots \mu_n \lambda_1 \dots \lambda_n C_1 \dots C_{K-1} \sigma_1 \dots \sigma_n) \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n P(Y_{ij} | \mu_j, \lambda_j, F_i, \sigma_j, C_1 \dots C_{K-1}) \end{aligned}$$

で与えられる。 $p_0(F_1 \dots F_m \mu_1 \dots \mu_n \lambda_1 \dots \lambda_n C_1 \dots C_{K-1} \sigma_1 \dots \sigma_n)$ は事前確率分布で、以下のように与える。

$$\begin{aligned} \mu_j &\sim U(-L, +W), \quad \lambda_j \sim U(-L, +W), \quad F_i \sim N(0, 1), \quad \sigma_j \sim U(0, +W), \\ p_C(C_1 \dots C_{K-1}) &= \begin{cases} \text{constant} & -L < C_1 < \dots < C_{K-1} < +W \quad \text{のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで L および W は十分に大きい値であり、 $U(A, B)$ は区間 (A, B) 上の一様分布を表し、 $N(0, 1)$ は標準正規分布を表す。それぞれの確率密度関数を $u(x; A, B)$ および $\phi(z)$ で表して、

$$\begin{aligned} &p_0(F_1 \dots F_m \mu_1 \dots \mu_n \lambda_1 \dots \lambda_n C_1 \dots C_{K-1} \sigma_1 \dots \sigma_n) \\ &= p_C(C_1 \dots C_{K-1}) \cdot \sum_{i=1}^m \phi(F_i) \cdot \prod_{j=1}^n u(\mu_j; -L, +U) u(\lambda_j; 0, +U) u(\sigma_j; 0, +U) \end{aligned}$$

とおく。

3 アルゴリズム

上のモデルに対して次の MCMC アルゴリズムにより事後分布を推定する。ただし、式(3)で確率が与えられるため、原点と単位に任意性がある。原点と単位を次式 $C_1 = 0$ 、 $C_{K-1} = 1$ により設定する。この原点と単位の下で Metropolis-within-Gibbs アルゴリズムを以下のように実行する。

ステップ0 第 t 回目のサンプリングにおける F_i 、 μ_j 、 λ_j 、 C_k 、 σ_j 、 ρ の値を $F_i^{(t)}$ 、 $\mu_j^{(t)}$ 、 $\lambda_j^{(t)}$ 、 $C_k^{(t)}$ 、 $\sigma_j^{(t)}$ 、 $\rho^{(t)}$ で表す。初期値を $F_i^{(0)}$ 、 $\mu_j^{(0)}$ 、 $\lambda_j^{(0)}$ 、 $C_k^{(0)}$ に設定し、 $t \leftarrow 0$ とおく。

ステップ1 $i = 1 \sim m$ に対して 1a ~ 1b を繰り返す。

1a サンプルの候補値 $y \sim N(F_i^{(t)}, \sigma_{Fi}^2)$ を生成し、採択確率 a を設定する。

$$a = \min \left\{ 1, \frac{P(\dots F_{i-1}^{(t+1)}, y, F_{i+1}^{(t)} \dots \sigma_n^{(t)})}{P(\dots F_{i-1}^{(t+1)}, F_i^{(t)}, F_{i+1}^{(t)} \dots \sigma_n^{(t)})} \cdot \frac{\phi(F_i^{(t)}; y, \sigma_{Fi}^2)}{\phi(y; F_i^{(t)}, \sigma_{Fi}^2)} \right\}$$

ここで、 $\phi(x; \mu, \sigma^2)$ は平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布密度関数を表す。

1b $F_i^{(t+1)}$ の値を設定する。

$$F_i^{(t+1)} = \begin{cases} y & \text{確率 } a \text{ で} \\ F_i^{(t)} & \text{上記以外の場合} \end{cases}$$

ステップ2 $j = 1 \sim n$ に対して 2a ~ 2b を繰り返す。

2a サンプルの候補値 $y \sim N(\mu_j^{(t)}, \sigma_{\mu j}^2)$ を生成し、採択確率 a を設定する。

$$a = \min \left\{ 1, \frac{P(\dots \mu_{j-1}^{(t+1)}, y, \mu_{j+1}^{(t)} \dots \sigma_n^{(t)})}{P(\dots \mu_{j-1}^{(t+1)}, \mu_j^{(t)}, \mu_{j+1}^{(t)} \dots \sigma_n^{(t)})} \cdot \frac{\phi(\mu_j^{(t)}; y, \sigma_{\mu j}^2)}{\phi(y; \mu_j^{(t)}, \sigma_{\mu j}^2)} \right\}$$

2b $\mu_j^{(t+1)}$ の値を設定する。

$$\mu_j^{(t+1)} = \begin{cases} y & \text{確率 } a \text{ で} \\ \mu_j^{(t)} & \text{上記以外の場合} \end{cases}$$

ステップ3 $j = 1 \sim n$ に対して 3a ~ 3b を繰り返す。

3a サンプルの候補値 $y \sim N(\lambda_j^{(t)}, \sigma_{\lambda j}^2)$ を生成し、採択確率 a を設定する。

$$a = \min \left\{ 1, \frac{P(\dots \lambda_{j-1}^{(t+1)}, y, \lambda_{j+1}^{(t)} \dots \sigma_n^{(t)})}{P(\dots \lambda_{j-1}^{(t+1)}, \lambda_j^{(t)}, \lambda_{j+1}^{(t)} \dots \sigma_n^{(t)})} \cdot \frac{\phi(\lambda_j^{(t)}; y, \sigma_{\lambda j}^2)}{\phi(y; \lambda_j^{(t)}, \sigma_{\lambda j}^2)} \right\}$$

3b $\lambda_j^{(t+1)}$ の値を設定する。

$$\lambda_j^{(t+1)} = \begin{cases} y & \text{確率 } a \text{ で} \\ \lambda_j^{(t)} & \text{上記以外の場合} \end{cases}$$

ステップ4 $C_1^{(t+1)} = 0$ 、 $C_{K-1}^{(t+1)} = 1$ とおく。 $K > 3$ のとき、 $k=2 \sim K-2$ に対して 4a ~ 4b を繰り返す。

4a サンプルの候補値 $y \sim N(C_k^{(t)}, \sigma_{Ck}^2)$ を生成し、採択確率 a を設定する。

$$a = \min \left\{ 1, \frac{P(\dots C_{k-1}^{(t+1)}, y, C_{k+1}^{(t)} \dots \sigma_n^{(t)})}{P(\dots C_{k-1}^{(t+1)}, C_k^{(t)}, C_{k+1}^{(t)} \dots \sigma_n^{(t)})} \cdot \frac{\phi(C_k^{(t)}; y, \sigma_{Ck}^2)}{\phi(y; C_k^{(t)}, \sigma_{Ck}^2)} \right\}$$

4b $C_k^{(t+1)}$ の値を設定する。

$$C_k^{(t+1)} = \begin{cases} y & \text{確率 } a \text{ で} \\ C_k^{(t)} & \text{上記以外の場合} \end{cases}$$

ステップ5 $j = 1 \sim n$ に対して 5a ~ 5b を繰り返す。

5a サンプルの候補値 $y \sim N(\sigma_j^{(t)}, \sigma_{\sigma j}^2)$ を生成し、採択確率 a を設定する。

$$a = \min \left\{ 1, \frac{P(\dots \sigma_{j-1}^{(t+1)}, y, \sigma_{j+1}^{(t)} \dots \sigma_n^{(t)})}{P(\dots \sigma_{j-1}^{(t+1)}, \sigma_j^{(t)}, \sigma_{j+1}^{(t)} \dots \sigma_n^{(t)})} \cdot \frac{\phi(\sigma_j^{(t)}; y, \sigma_{\sigma j}^2)}{\phi(y; \sigma_j^{(t)}, \sigma_{\sigma j}^2)} \right\}$$

5b $\sigma_j^{(t+1)}$ の値を設定する。

$$\sigma_j^{(t+1)} = \begin{cases} y & \text{確率 } a \text{ で} \\ \sigma_j^{(t)} & \text{上記以外の場合} \end{cases}$$

ステップ6 $\rho^{(t+1)}$ の値を式 (2) により設定する。

$$\rho^{(t+1)} = \frac{(\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(t+1)})^2}{(\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(t+1)})^2 + \sum_{j=1}^n (\sigma_j^{(t+1)})^2}$$

ステップ7 $t \leftarrow t+1$ とおく。 t が MCMC の繰り返し回数に達していないならばステップ1に戻る。

上記のアルゴリズムの実行例は発表時に報告する。

結語

「項目反応理論に基づく分析」と「因子分析と信頼性係数の算出という項目因子理論に基づく分析」を対比した場合、尺度を用いた実証研究における尺度の分析法としての両者の違いは、測定の対象である能力値は、項目反応理論ではモデルに基づく推定値であるのに対して、信頼性係数を求める尺度値では観測値である項目得点の和であるということがあげられる。構成概念の強さを推定する場合は、その背景となる理論がどの程度確立しているかが問題となる。また、特性が明確な多くの項目が用意され、その使用が回答者の反応に応じて適応的に行われる適応型テストにおいて項目反応理論はその理論的基盤を提供する。他方、調査紙を用いる研究では、使用される項目が比較的少数で固定されている、あるいは尺度の確認／作成が同時に行われることが多く、この場合は因子分析と項目群全体の安定性を表す信頼性係数を用いる方法が適している。項目和は観測値（項目値）の和であるので観測値として扱うことができ、発展途上の研究に適していると考えられる。

引用文献

McDonald, R. P. (1999). *Test theory*. LEA

岡本安晴 (2011). 信頼性係数のベイズ推定. 日本テスト学会第9回大会発表論文集、120-123.

岡本安晴 (2012). 信頼性係数のベイズ的分析およびIRTとの関連. 日本テスト学会第10回大会発表論文集、164-167.