

SDTにおけるベイズ的データ分析

日本女子大学人間社会学部

岡本 安晴

Yasuharu Okamoto

0 経緯

1 信号検出理論(SDT)

2 最尤法からベイズ的分析法へ

3 SDTにおけるベイズ的方法

4 SDTとGLM: ベイズ的方法の利点



SDTにおけるベイズ的データ分析 Bayesian Data Analysis in SDT



岡本 安晴
OKAMOTO Yasuharu

日本女子大学人間社会学部心理学科

この論文を読む/探す



CiNii 論文PDF - オープンアクセス



NDL-OPAC - 国立国会図書館で本をさがす



CiNii Books - 大学図書館でさがす



RefWorks



JWU Link



日本女子大学OPAC

収録刊行物



日本女子大学紀要. 人間社会学部 [巻号一覧]

日本女子大学紀要. 人間社会学部 22, 53-60, 2011 [この号の目次]

日本女子大学

プレビュー



各種コード

NII論文ID(NAID) :
110009002007
NII書誌ID(NCID) :
AN10360917

本文言語コード :

岡本安晴(2005)「SDTデータのベイズ的分析(ベイズアプローチ)」
日本行動計量学会大会発表論文抄録集 33、172－175.

岡本安晴(2006)「SDTデータのベイズ的分析：
評定データのMCMCによる分析(ベイズ)」
日本行動計量学会大会発表論文抄録集 34、92－95.

岡本安晴(2007)「SDTデータ分析における最尤法の問題点」
日本行動計量学会大会発表論文抄録集 35、249－252.

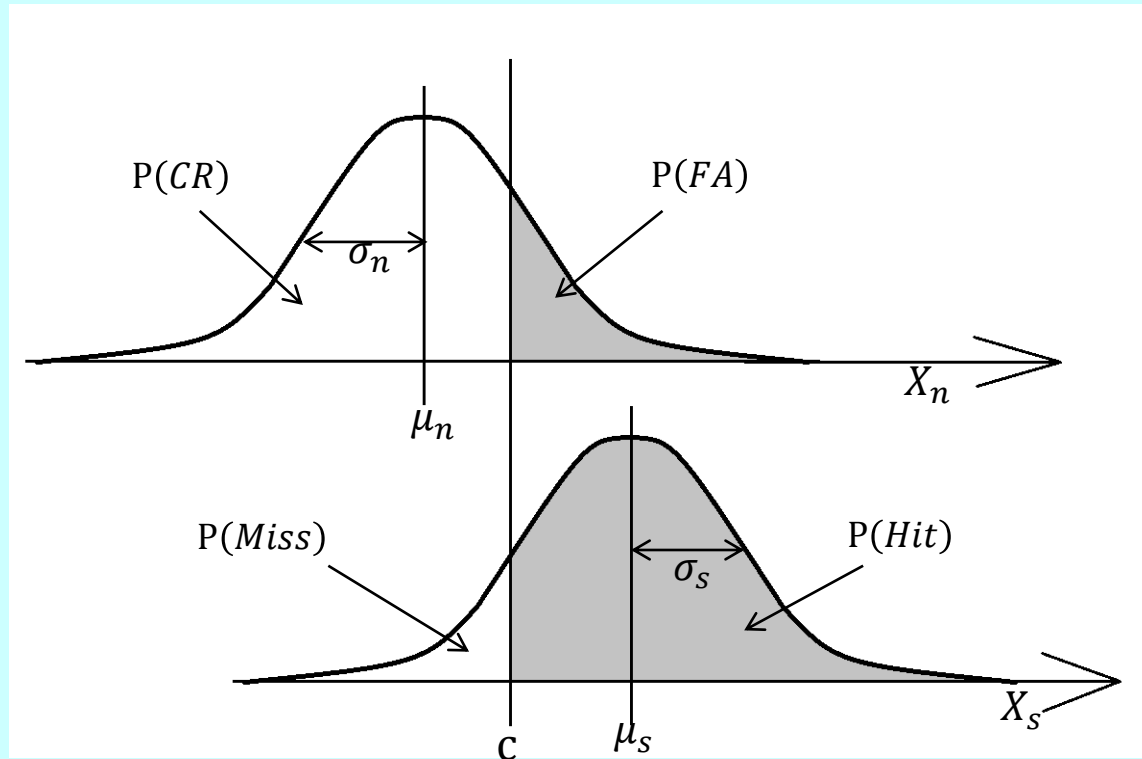
SDTの適用場面

		反応	
		Yes (シグナルあり)	No
提示刺激	ノイズのみ	False Alarm (FA)	Correct Rejection
	シグナルあり	Hit	Miss

		反応	
		Yes (提示済み刺激)	No
提示刺激	新奇刺激	False Alarm (FA)	Correct Rejection
	提示済み刺激	Hit	Miss

		検査結果	
		陽性	陰性
被検者	該当疾患なし	偽陽性	真陰性
	該当疾患あり	真陽性	偽陰性

SDTのモデル



$$P(FA) = P(\text{Yes} \mid \text{ノイズ刺激}) = \Phi((\mu_n - c)/\sigma_n)$$

$$P(CR) = P(\text{No} \mid \text{ノイズ刺激}) = 1 - P(FA)$$

$$P(Hit) = P(\text{Yes} \mid \text{シグナル刺激}) = \Phi((\mu_s - c)/\sigma_s)$$

$$P(Miss) = P(\text{No} \mid \text{シグナル刺激}) = 1 - P(Hit)$$

分析法

最小2乗法(最小 χ^2)

最尤法

ベイズ的分析法

最小2乗法

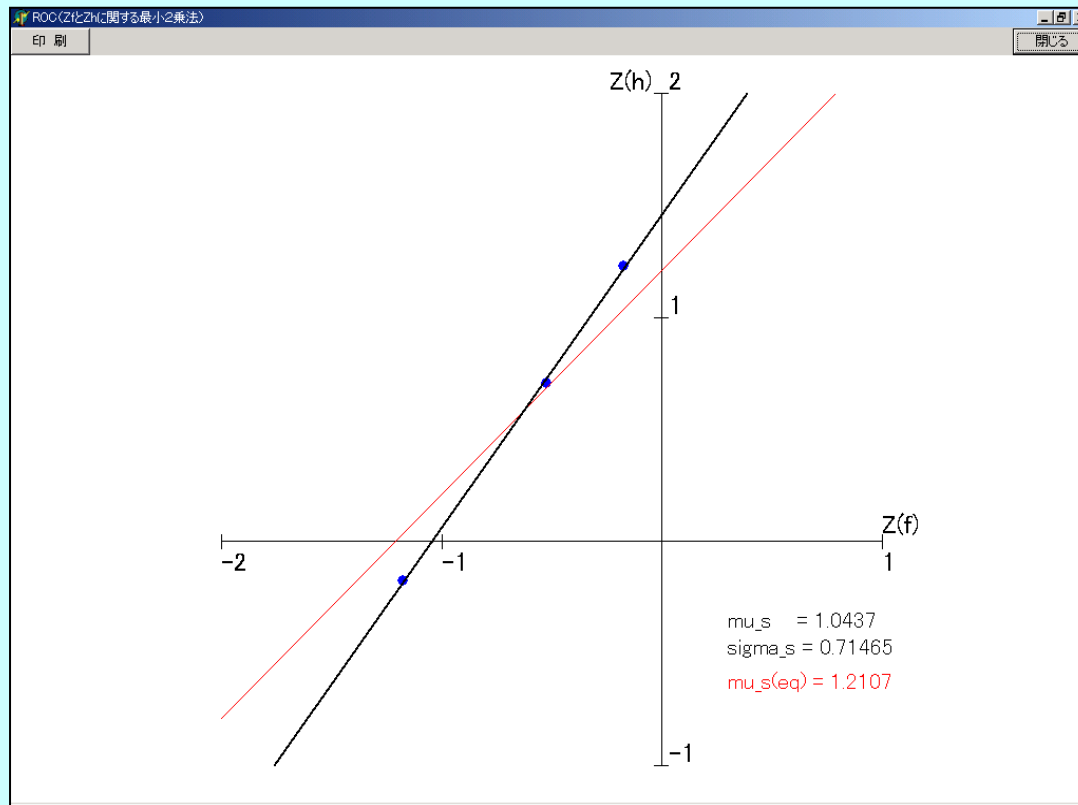


図3 計算結果の表示

$$Z(FA) = \Phi^{-1}(P(FA))$$
$$Z(Hit) = \Phi^{-1}(P(Hit))$$

$$Z(Hit) = \frac{1}{\sigma_s} \cdot Z(FA) + \frac{\mu_s}{\sigma_s}$$

点 (u, v) と 直線 $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$

との距離

$$\frac{\left| \left(x_0 - u - \frac{x_0}{y_0} v \right) \left(y_0 - v - \frac{y_0}{x_0} u \right) \right|}{\sqrt{\left(x_0 - u - \frac{x_0}{y_0} v \right)^2 + \left(y_0 - v - \frac{y_0}{x_0} u \right)^2}}$$

推定値 $\hat{\mu}_S, \hat{\sigma}_S, \hat{c}_k$ の統計学的性質？
(標準的最小2乗法とは異なる)

	...	反応 k	...
ノイズ	...	x_{nk} m_{nk}	...
シグナル	...	x_{sk} m_{sk}	...

Minimum chi-square estimate

R. V. Hogg, J. W. McKean & A. T. Craig (2005).

Introduction to Mathematical Statistics, 6th ed., Chap. 5

$$\chi^2 = \sum \left\{ \frac{(x_{nk} - m_{nk})^2}{m_{nk}} + \frac{(x_{sk} - m_{sk})^2}{m_{sk}} \right\}$$

$\chi^2 \sim$ カイ2乗分布 (サンプルサイズが十分に大きいとき)

T. D. Wickens (2002). *Elementary Signal Detection Theory*. Chap. 11, Appendix.

(岡本安晴(訳)(2005)「信号検出理論の基礎」、共同出版)

最尤法

尤度関数

$$L(\mu_s, \sigma_s, c_1, \dots, c_N) = \prod_{i=1}^N P_i(CR)^{NC_i} P_i(FA)^{NF_i} P_i(Miss)^{NM_i} P_i(Hit)^{NH_i}$$

T. D. Wickens (1992) Maximum-Likelihood Estimation of a Multivariate Gaussian Rating Model with Excluded data. Journal of Mathematical Psychology, 36, 213-234.

The Regularity Conditions

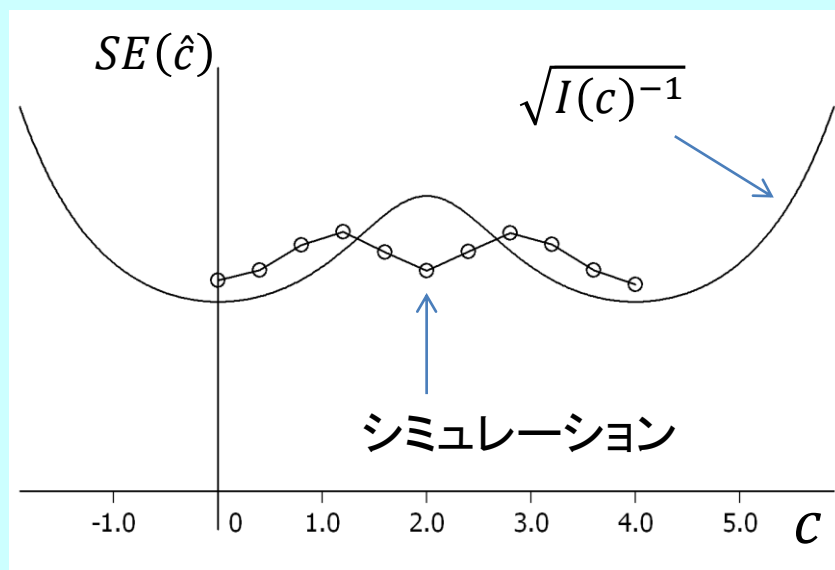
Hogg et al. (2005). Introduction to Mathematical Statistics, 6th ed.

稲垣宣生(2003). 数理統計学 改訂版.

Independent and identically distributed: iid

$$N \rightarrow \infty \quad \text{のとき} \quad \sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta) \xrightarrow{\text{分布収束}} N_s(\mathbf{0}, \mathbf{I}(\theta)^{-1})$$

岡本安晴(2007)
 「SDTデータ分析における最尤法の問題点」
 日本行動計量学会第35回大会発表論文抄録集

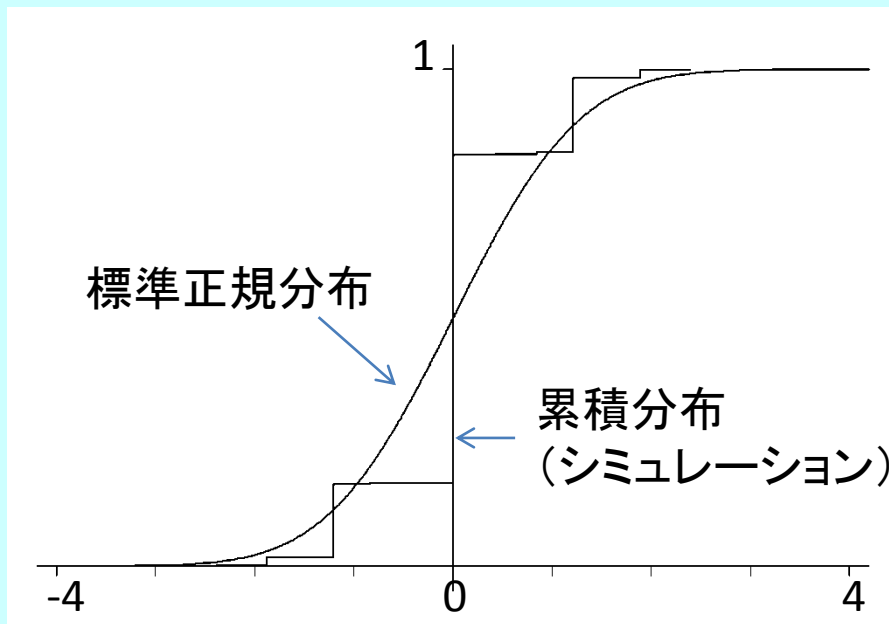


$$I(c) = E \left(\left(\frac{dl(c)}{dc} \right)^2 \right)$$

$$SE(\hat{c}) = \sqrt{I(c)^{-1}}$$

$$N = N_s = N_n = 10 \quad \mu_s = 4$$

$$P(\hat{c} = \pm\infty) > 0 \quad \longrightarrow \quad E((\hat{c} - c)^2) = \infty$$



$$N = N_s = N_n = 10$$

$$C=2 \quad \mu_s = 4$$

$$\hat{c} \sim N(c, I(c)^{-1})$$

$$\frac{\hat{c} - c}{\sqrt{I(c)^{-1}}} \sim N(0, 1)$$

$\hat{c}$ は連続分布とは
かなり離れた
離散分布である。

ベイズ的分析

データ生成モデル $P(D|\theta)$

母数の分布 $P(\theta)$



母数とデータ生成の同時分布 $P(\theta, D) = P(\theta)P(D|\theta)$

データ  母数の分布(事後分布)

$$P(\theta | D) = \frac{P(\theta, D)}{P(D)} \propto P(\theta)P(D|\theta) \propto P(\theta)L(\theta | D)$$

等分散モデル: $\sigma_n = \sigma_s = 1$

岡本安晴(2005)「SDTのベイズ的分析」

日本行動計量学会第33回大会発表論文抄録集

度数データ		
	Yes	No
Noise	N_{FA}	N_{CR}
Signal+Noise	N_H	N_M

確率		
	Yes	No
Noise	p_{FA}	p_{CR}
Signal+Noise	p_H	p_M

$$p_{FA} = 1 - p_{CR} = \Phi(-c)$$

$$p_{CR} = \int_{-\infty}^c \phi(t) dt = \Phi(c)$$

$$p_H = 1 - p_M = \Phi(d' - \lambda)$$

$$p_M = \int_{-\infty}^c \phi(t - \mu_s) \cdot dt = \int_{-\infty}^{c - \mu_s} \phi(t) dt = \Phi(c - \mu_s)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot t^2\right)$$

$$P(D|d', \lambda) = \text{const} \cdot p_{CR}^{N_{CR}} \cdot p_{FA}^{N_{FA}} \cdot p_M^{N_M} \cdot p_H^{N_H}$$

$$P(\mu_s, c|D) \propto p_0(\mu_s, c)P(D|\mu_s, c) \propto p_0(\mu_s, c) \cdot p_{CR}^{N_{CR}} \cdot p_{FA}^{N_{FA}} \cdot p_M^{N_M} \cdot p_H^{N_H}$$

$$P(\mu_s, c|D) = \frac{p_{CR}^{N_{CR}} \cdot p_{FA}^{N_{FA}} \cdot p_M^{N_M} \cdot p_H^{N_H} \cdot p_0(\mu_s, c)}{\sum_{\mu_s, c} p_{CR}^{N_{CR}} \cdot p_{FA}^{N_{FA}} \cdot p_M^{N_M} \cdot p_H^{N_H} \cdot p_0(\mu_s, c)}$$

```
double sum = 0.0;
for (int id = 0; id <= NPoints; id++){
    if ((id % 100) == 0) {
        richTextBox1->AppendText(id.ToString() + "/" + NPoints.ToString() + "¥n");
        Update(); richTextBox1->Focus();
    }
    for (int ik = 0; ik <= NPoints; ik++){
        Pdk[id][ik] = calc_L( d_value(id), k_value(ik) );
        sum += Pdk[id][ik];
    }
}
for (int id = 0; id <= NPoints; id++)
    for (int ik = 0; ik <= NPoints; ik++) Pdk[id][ik] /= sum;
```


不等分散モデル: $\sigma_n \neq \sigma_s$ (評定データの場合)

岡本安晴(2006)「SDTのベイズ的分析: 評定データのMCMCによる分析」
日本行動計量学会第33回大会発表論文抄録集

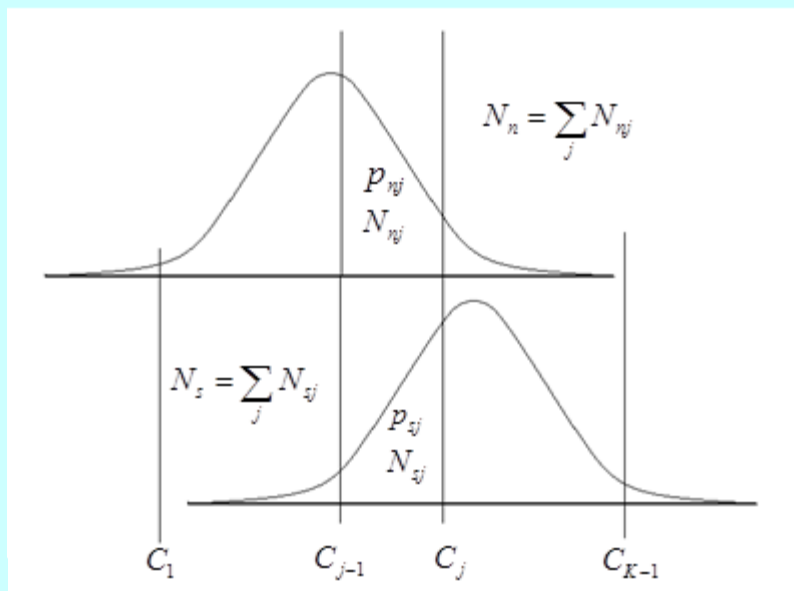


図1

$$p_{nj} = \begin{cases} \Phi(C_1) & j=1 \\ \Phi(C_j) - \Phi(C_{j-1}) & 1 < j < K \\ 1 - \Phi(C_{K-1}) & j=K \end{cases}$$

$$p_{sj} = \begin{cases} \Phi\left(\frac{C_1 - \mu_s}{\sigma_s}\right) & j=1 \\ \Phi\left(\frac{C_j - \mu_s}{\sigma_s}\right) - \Phi\left(\frac{C_{j-1} - \mu_s}{\sigma_s}\right) & 1 < j < K \\ 1 - \Phi\left(\frac{C_{K-1} - \mu_s}{\sigma_s}\right) & j=K \end{cases}$$

$$L(\mu_s, \sigma_s, C_1, \dots, C_{K-1} | N_{nj}, N_{sj}) = \prod_j p_{nj}^{N_{nj}} p_{sj}^{N_{sj}}$$

$$p(\mu_s, \sigma_s, C_1, \dots, C_{K-1} | N_{nj}, N_{sj}) \propto L(\mu_s, \sigma_s, C_1, \dots, C_{K-1} | N_{nj}, N_{sj}) \cdot p_0(\mu_s, \sigma_s, C_1, \dots, C_{K-1})$$

$$p_0(\mu_s, \sigma_s, C_1, \dots, C_{K-1}) \sim p_0(\mu_s) p_0(\sigma_s) I(C_1, \dots, C_{K-1})$$

$$I(C_1, \dots, C_{K-1}) = \begin{cases} 1 & C_1 < C_2 < \dots < C_{K-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Markov chain Monte Carlo (MCMC) methodology

Metropolis-within-Gibbs

Metropolis-Hastings (M-H) within Gibbs

$$(1) \quad Y \sim N\left(\mu_s^{(t)}, \sigma_\mu^2\right) \quad \mu_s^{(t+1)} = \begin{cases} Y & \text{確率 } \alpha_\mu \\ \mu_s^{(t)} & \text{確率 } 1 - \alpha_\mu \end{cases}$$

$$(2) \quad Y \sim \text{LogN}\left(\sigma_s^{(t)}, \sigma_\sigma^2\right) \quad \sigma_s^{(t+1)} = \begin{cases} Y & \text{確率 } \alpha_\sigma \\ \sigma_s^{(t)} & \text{確率 } 1 - \alpha_\sigma \end{cases}$$

(3) For $j = 1$ to $K-1$:

$$Y \sim N\left(C_j^{(t)}, \sigma_C^2\right) \quad C_j^{(t+1)} = \begin{cases} Y & \text{確率 } \alpha_{Cj} \\ C_j^{(t)} & \text{確率 } 1 - \alpha_{Cj} \end{cases}$$

(4) $t \leftarrow t + 1$ と更新して(1)に戻る。

```

for (int iSimu = 0; iSimu < NSimu; iSimu++){
    if ((iSimu % 1000) == 0){
        richTextBox1->AppendText("\nStep " + iSimu.ToString() +
            "/" + NSimu.ToString() + " started");
        richTextBox1->Focus();
    }
    double a; double y = rn.normalMS( mu0, cmu );
    a = calc_a( y, sgm0, ki0, mu0, sgm0 );
    if (rn.uni() < a){
        acpt_mu++; mu1 = y;
    }else{ mu1 = mu0; }
    mu[iSimu] = mu0 = mu1; y = rn.normalMS( sgm0, csgm );
    if (y > 0.0){
        a = calc_a( mu1, y, ki0, mu1, sgm0 );
        if (rn.uni() < a){ acpt_sgm++; sgm1 = y; }
        else{ sgm1 = sgm0; }
    }else{ sgm1 = sgm0; }
    sgm[iSimu] = sgm0 = sgm1;
    for (int h = 0; h < NCat-1; h++) kitmp[h] = ki0[h];
    for (int h = 0; h < NCat-1; h++){
        y = rn.normalMS(ki0[h], cki[h]);
        if (h == 0){
            if (y < ki0[1]){
                kitmp[0] = y; a = calc_a1( mu1, sgm1, kitmp, ki0 );
                if (rn.uni() < a){
                    acpt_ki[0]++; ki0[0] = kitmp[0];
                }else{ kitmp[0] = ki0[0]; }
            }else{ kitmp[0] = ki0[0]; }
        }else if(h == NCat-2){
            if (y > ki0[NCat-3]){
                kitmp[NCat-2] = y; a = calc_a1( mu1, sgm1, kitmp, ki0 );
                if (rn.uni() < a){
                    acpt_ki[NCat-2]++; ki0[NCat-2] = kitmp[NCat-2];
                }else{ kitmp[NCat-2] = ki0[NCat-2]; }
            }else{ kitmp[NCat-2] = ki0[NCat-2]; }
        }else{
            if ((ki0[h-1] < y) && (y < ki0[h+1])){
                kitmp[h] = y; a = calc_a1( mu1, sgm1, kitmp, ki0 );
                if (rn.uni() < a){ acpt_ki[h]++; ki0[h] = kitmp[h]; }
                else{ kitmp[h] = ki0[h]; }
            }else{ kitmp[h] = ki0[h]; }
        }
    }
    for (int h = 0; h < NCat-1; h++) ki[iSimu][h] = kitmp[h];
}
}

```

Generalized Linear Model (GLM) for SDT

2 × 2 Factorial Design		
	A1: $X_a = 0$	A2: $X_a = 1$
B1: $X_b = 0$	μ	$\mu + \alpha$
B2: $X_b = 1$	$\mu + \beta$	$\mu + \alpha + \beta$

$$Y = \mu + \alpha X_a + \beta X_b + \gamma X_a X_b + \delta Z \quad Z: \text{covariate}$$

Observer i

$$d_i = \mu_{di} + \alpha_{di} X_a + \beta_{di} X_b + \gamma_{di} X_a X_b + \delta_{di} Z$$

$$\sigma_{si} = \mu_{si} + \alpha_{si} X_a + \beta_{si} X_b + \gamma_{si} X_a X_b + \delta_{si} Z$$

$$C_{ji} = \mu_{Cji} + \alpha_{Cji} X_a + \beta_{Cji} X_b + \gamma_{Cji} X_a X_b + \delta_{Cji} Z$$

$$P(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \delta | \text{Data}) \propto p_0(\mu, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \cdot P(\text{Data} | \mu, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

素データ数が推定の安定性に寄与することが期待される。

まとめ

- 1 確率モデルに基づくSDTデータの分析において、最尤法はデータ数が少ない場合に漸近理論を用いることは問題である。
- 2 ベイズ的方法は、データ数が多くないときにも有効であり、データからの情報は事後分布に集約される。
- 3 事後分布の推定は、パラメータ数が少ないときはグリッド法で簡単に行うことができる。
- 4 パラメータ数がグリッド法では無理な数であるときは、事後分布はMCMCで推定できる。MCMCのプログラミングは難しくない。
- 5 GLMに組み込むと、実験条件などの要因の影響の統計的分析を直接行うことができる。