

被験者間 1 要因・被験者内 1 要因分散分析

被験者間 1 要因 A、および被験者内 1 要因 B のモデルを次のようにおく。

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \eta_{i/j} + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + (\eta\beta)_{ik/j} + \varepsilon_{ijk}$$

ここで、

主効果 A

$$\alpha_j = \mu_j - \mu$$

主効果 B

$$\beta_k = \mu_k - \mu$$

交互作用 A B

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)_{jk} &= \mu_{jk} - \mu_j - \mu_k + \mu \\ &= \mu_{jk} - (\mu_j - \mu) - (\mu_k - \mu) - \mu \end{aligned}$$

ij 番目の被験者固有の効果

$$\eta_{i/j} = \mu_{ij} - \mu_j$$

A_j と B_k との交互作用による効果を調整した、ij 番目の被験者と要因 B の水準 k との交互作用

$$\begin{aligned} (\eta\beta)_{ik/j} &= (\mu_{ijk} - \mu) - (\mu_k - \mu) - (\mu_{ij} - \mu) - (\alpha\beta)_{jk} \\ &= \mu_{ijk} - \mu_{ij} - \mu_{jk} + \mu_j \end{aligned}$$

である。

データ値 Y_{ijk} の平方和を次のように分解する。

$$\begin{aligned} SS &= \sum (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 \\ &= b \sum_{i,j} (\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{...})^2 + \sum_{i,j,k} (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij\cdot})^2 \\ &= SS_{B \cdot S} + SS_{W \cdot S} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 SS_{B \cdot S} &= b \sum_{i,j} (\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{\dots})^2 \\
 &= nb \sum_j (\bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{Y}_{\dots})^2 + b \sum_{i,j} (\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j\cdot})^2 \\
 &= SS_A + SS_{S/A}、 \\
 SS_{W \cdot S} &= \sum_{i,j,k} (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij\cdot})^2 \\
 &= na \sum_k (\bar{Y}_{\cdot\cdot k} - \bar{Y}_{\dots})^2 + n \sum_{j,k} (\bar{Y}_{\cdot jk} - \bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot k} + \bar{Y}_{\dots})^2 + \sum_{i,j,k} (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{\cdot jk} + \bar{Y}_{\cdot j\cdot})^2 \\
 &= SS_B + SS_{AB} + SS_{SB/A}
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 SS_A &= nb \sum_j (\bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{Y}_{\dots})^2 \\
 SS_{S/A} &= b \sum_{i,j} (\bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j\cdot})^2 \\
 SS_B &= na \sum_k (\bar{Y}_{\cdot\cdot k} - \bar{Y}_{\dots})^2 \\
 SS_{AB} &= n \sum_{j,k} (\bar{Y}_{\cdot jk} - \bar{Y}_{\cdot j\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot k} + \bar{Y}_{\dots})^2 \\
 SS_{SB/A} &= \sum_{i,j,k} (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij\cdot} - \bar{Y}_{\cdot jk} + \bar{Y}_{\cdot j\cdot})^2
 \end{aligned}$$

である。

これらの平方和の期待値は以下のようになる。

$$EMS_A = \sigma_e^2 + b\sigma_{S/A}^2 + nb\theta_A^2$$

$$EMS_{S/A} = \sigma_e^2 + b\sigma_{S/A}^2$$

$$EMS_B = \sigma_e^2 + \sigma_{SB/A}^2 + na\theta_B^2$$

$$EMS_{AB} = \sigma_e^2 + \sigma_{SB/A}^2 + n\theta_{AB}^2$$

$$EMS_{SB/A} = \sigma_e^2 + \sigma_{SB/A}^2$$

ここで、

$$\theta_A^2 = \frac{\sum \alpha_j^2}{a-1}$$

$$\theta_B^2 = \frac{\sum \beta_k^2}{b-1}$$

$$\theta_{AB}^2 = \frac{\sum (\alpha\beta)_{jk}^2}{(a-1)(b-1)}$$

$$\sigma_e^2 = E(\varepsilon_{ijk}^2)$$

$$\sigma_{S/A}^2 = E(\eta_{i/j}^2)$$

$$\sigma_{SB/A}^2 = E((\eta\beta)_{ik/j}^2)$$

である。

以上より、分散分析表は表 1 のように作成される。

表 1 分散分析表

変動要因	平方和	自由度	平均平方和	F 比
被験者間	SS_{B-S}	$an-1$		
A	SS_A	$a-1$	MS_A	$MS_A / MS_{S/A}$
残差 (A)	$SS_{S/A}$	$a(n-1)$	$MS_{S/A}$	
被験者内	SS_{W-S}	$an(b-1)$		
B	SS_B	$b-1$	MS_B	$MS_B / MS_{SB/A}$
A × B	SS_{AB}	$(a-1)(b-1)$	MS_{AB}	$MS_{AB} / MS_{SB/A}$
残差 (B)	$SS_{SB/A}$	$a(n-1)(b-1)$	$MS_{SB/A}$	
全体	SS	$anb-1$		